



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MĚŘENÍ OVALITY EXTRUDOVANÉHO VLÁKNA POMOCÍ
TŘÍ KAMER**

OVALITY MEASUREMENT OF EXTRUDED FIBER USING THREE CAMERAS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Pavel Loučka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Pavel Loučka**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Měření ovality extrudovaného vlákna pomocí tří kamer

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Důležitými parametry extrudovaného vlákna je jeho průměr a ovalita. Nedodržení stanovených hodnot má významný vliv na jeho kvalitu a použitelnost. Z tohoto důvodu je nutné sledovat tyto parametry přímo při jeho výrobě.

Cíle diplomové práce:

Provést kalibraci kamerového systému.

Analyzovat snímky z kamerového systému pomocí numerických metod zpracování obrazové informace. Určit průměr a ovalitu extrudovaného vlákna.

Vytvořit speciální aplikaci pro danou analýzu.

Seznam doporučené literatury:

MARTIŠEK, Dalibor. Matematické principy grafických systémů. Brno: Littera, 2002, 278 s. ISBN 80-857-6319-2.

KLÍMA, Miloš. Zpracování obrazové informace. V Praze: České vysoké učení technické, 1996. ISBN 8001014363.

PRATT, William K. Digital Image Processing (Third Edition) PIKS Inside [online]. 3rd ed. New York: Wiley-Interscience, 2001 [cit. 2014-08-07]. ISBN 04-712-2132-5. Dostupné z: <http://www.csupomona.edu/~kding/materials/Digital Image Processing - Third Edition - William K.Pratt.pdf>.

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Důležitým parametrem sledovaným při výrobě extrudovaného vlákna je jeho průměr. Měření této veličiny lze provést za předpokladu kruhovitosti jeho průřezu pomocí jedné snímací kamery. V praxi se ukázalo, že dalším důležitým parametrem je také ovalita, tedy jak moc je vlákno zploštělé. V tomto textu se tak bude předpokládat obecnější tvar průřezu vlákna, a to ve tvaru elipsy. K určení ovality je potom zapotřebí již alespoň tří různých pohledů na zkoumané vlákno. Matematická část práce se zabývá především analytickým popisem měření ovality vlákna, konkrétně pomocí dvou rozdílných přístupů založených na poznatcích lineární algebry, projektivní geometrie a teorie kuželoseček. Hlavním cílem práce je pak tuto teorii společně s metodami obrazové analýzy využít k určení ovality a průměru vlákna z jejich snímků. Přesný výpočet těchto veličin je ale podmíněn přesnou kalibrací kamerového systému, kterému práce také věnuje pozornost. Kromě toho obsahuje i krátkou zmínku o technickém provedení měření ovality a jeho možných úskalích.

Summary

One of the important parameters observed during extruded fibre fabrication is its diameter. The diameter can be measured with a single scanning camera assuming that the fibre section has a circular shape. As proved in practice, another important parameter is ovality, that is the rate of fibre flattening. This paper assumes that the fibre section shape is elliptical. In such a case, at least three different views on examined fibre are needed. Mathematical part of this paper is concerned with analytical description of fibre ovality measurement using two different approaches based on the knowledge of linear algebra, projective geometry and conic sections theory. Main goal of this paper is thus to use both mathematical theory and image analysis methods for ovality and diameter determination. Precise calculation of such quantities is, however, conditioned on precise camera system calibration, which is described in the paper as well. Additionally, the work contains a brief mention of technical realization of ovality measurement and its possible difficulties.

Klíčová slova

vlákno, ovalita, průměr, aplikace, lineární algebra, projektivní geometrie, kuželosečka, elipsa, obrazová analýza, kamerový systém

Keywords

fibre, ovality, diameter, application, linear algebra, projective geometry, conic section, ellipse, image analysis, camera system

LOUČKA, P. *Měření ovality extrudovaného vlákna pomocí tří kamer*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 56 s. Vedoucí doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Měření ovality extrudovaného vlákna pomocí tří kamer* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Pavel Loučka

Tímto bych chtěl rodině a všem svým blízkým poděkovat za neúnavnou podporu, kterou mi během tvorby tohoto díla projevovali. Zvláště chci poděkovat panu docentu Pavlu Štarhovi za vedení práce, podnětnou kritiku a kreativní nadhled.

Bc. Pavel Loučka

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 2 |
| 1 Extrudované vlákno | 3 |
| 1.1 Výroba a technické parametry | 3 |
| 1.2 Ovalita vlákna | 3 |
| 1.2.1 Motivace k měření ovality | 3 |
| 1.2.2 Zařízení k měření ovality | 3 |
| 1.2.3 Předpoklady měření | 5 |
| 1.2.4 Hledání aproximační elipsy | 6 |
| 1.3 Průměr vlákna | 8 |
| 2 Matematický výpočet ovality a průměru | 10 |
| 2.1 Podmínky jednoznačného určení kuželosečky | 10 |
| 2.2 Geometricky-analytický přístup | 12 |
| 2.2.1 Popis metody | 12 |
| 2.2.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy | 15 |
| 2.3 Ryze analytický přístup | 17 |
| 2.3.1 Popis metody | 17 |
| 2.3.2 Výpočet koeficientů pomocné elipsy | 18 |
| 2.4 Výpočet charakteristik pomocné elipsy z jejích koeficientů | 23 |
| 2.5 Výpočet ovality a průměru | 26 |
| 3 Kalibrace kamerového systému | 27 |
| 3.1 Kamerový systém | 27 |
| 3.2 Přímá metoda kalibrace | 30 |
| 3.3 Optimalizační metoda kalibrace | 36 |
| 4 Analýza snímků extrudovaného vlákna | 40 |
| 4.1 Preprocessing | 40 |
| 4.2 Detekce hran | 41 |
| 4.3 Nalezení optických tečen | 46 |
| 4.4 Využití ve výpočtu ovality | 46 |
| 5 Víceúčelová aplikace | 47 |
| 6 Výsledky měření na reálných datech | 48 |
| Závěr | 52 |
| Literatura | 53 |
| Seznam použitých zkratk a symbolů | 55 |
| Seznam příloh | 56 |
| CD s víceúčelovou aplikací, návodem k použití a snímky | 56 |

Úvod

Cílem práce je provést kalibraci kamerového systému, analyzovat snímky z kamerového systému pomocí numerických metod zpracování obrazové informace, určit průměr a ovalitu extrudovaného vlákna a nakonec taky vytvořit speciální aplikaci pro danou analýzu. Účelem tohoto textu je vylíčit plnění těchto úkolů a popsat teorii užitou k jejich splnění. Práce je aplikačním vyústěním vesměs teoretické bakalářské práce [13], ze které čerpá některé poznatky.

Samotná problematika měření ovality (zploštělosti) extrudovaného vlákna pochází z prostředí Laboratoře přenosu tepla a proudění při FSI VUT v Brně, kde se toto vlákno vyrábí a zkoumá. Zadání této práce pak bylo inspirováno patentem zařízení na měření ovality pana doc. Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. a pana prof. Ing. Miroslava Raudenského, CSc. (pro více informací o patentu viz [17]).

Kapitola 1 této práce tedy krátce pojednává o extrudovaném vlákně samotném (tj. jeho přibližných rozměrech a materiálu, ze kterého se vyrábí), o zařízení, které k měření ovality slouží, o technickém provedení měření a o jeho možných nedostatcích. Dále v této kapitole lze najít schématický návod, jak vlákno skutečného nedokonalého průřezu snímaného soustavou kamer aproximovat pomocí průřezu eliptického tvaru nazvaného *aproximační elipsa*.

Kapitola 2 staví na znalostech analytické geometrie a teorie kuželoseček, aby pomocí dvou různých přístupů analyticky popsala samotný výpočet ovality. Obecné principy z oblasti teorie kuželoseček tedy aplikuje na elipsu, čímž ukazuje, jak lze spočítat její charakteristiky (tj. délku hlavní a vedlejší poloosy, polohu středu elipsy a úhel jejího natočení vůči souřadné soustavě), tudíž i ovalitu zkoumaného vlákna. Kromě obecné teorie také zmiňuje některé další doplňující věty potřebné k zavedení dvou objevujících se přístupů výpočtu.

V kapitole 3 se detailněji představuje použitý kamerový systém a dvě zkoumané metody, jak jej zkalibrovat.

Náplní kapitoly 4 je už samotná analýza snímků extrudovaného vlákna, ke které využívá vybrané metody obrazové analýzy a poznatky z předchozích kapitol. Popisuje pre-processing obrazu, detekci hran vlákna v obraze a následný výpočet ovality a průměru za využití kalibrace kamer a zmíněné teorie.

V kapitole 5 je stručně popsána vytvořená víceúčelová aplikace schopná kalibrace kamerového systému, analýzy snímků extrudovaného vlákna a především určení ovality a průměru.

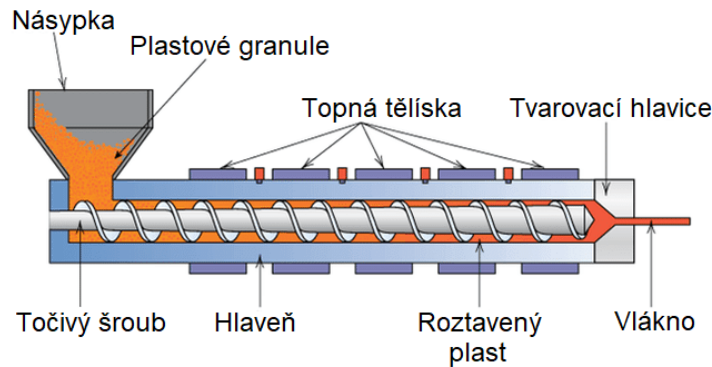
Kapitola 6 obsahuje výsledky analýzy dostupných snímků provedené ve zmíněné aplikaci. Uvádí také dva konkrétní příklady včetně interpretace výsledků, na nichž ilustruje základní poznatky získané z výzkumu těchto snímků.

V příloze může nakonec čtenář nalézt zmíněnou aplikaci, návod k jejímu použití a sadu snímků, které byly během této práce analyzovány.

1. Extrudované vlákno

1.1. Výroba a technické parametry

Vlákno se vyrábí tzv. *extruzí*, tedy vytlačováním za tepla. Vstupním materiálem jsou plastové granule, které se taví a vytlačují za pomoci extrudéru podobného tomu na obrázku níže:



Obrázek 1.1: Řez extrudérem¹

Vlákno se poté chladí a navíjí soustavou kladek na kotouče. Takto vyráběné vlákno má pak následující technické parametry:

- vlákno je duté, s vnějším průměrem v rozpětí 0,5 až 1,5 mm, nejčastěji kolem 0,8 mm
- materiálem k jeho výrobě bývá *polypropylen* nebo různé *polyamidy*

1.2. Ovalita vlákna

1.2.1. Motivace k měření ovality

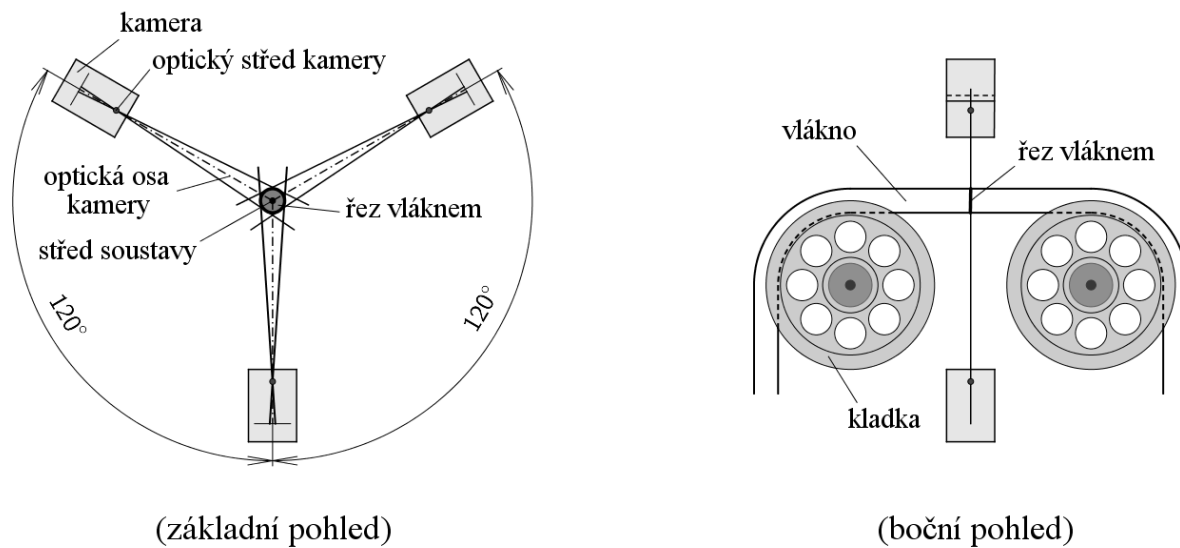
Vlivem zmíněného navíjení vlákna systémem kladek se může průřez vlákna zplošťovat a ztrácet původně zamýšlený kruhový tvar. Toto zploštění pak může mít negativní vliv na termodynamické vlastnosti vlákna. Vzhledem k dalšímu využití vlákna ve výrobě tepelných výměníků je tedy jeho ovalita (zploštění) klíčovým parametrem, který určuje vhodnost využití vlákna a popisuje kvalitu extruze.

1.2.2. Zařízení k měření ovality

Zařízení, které se v současné době používá v Laboratoři přenosu tepla a proudění při FSI VUT v Brně, je schématicky znázorněno na Obrázku 1.2:

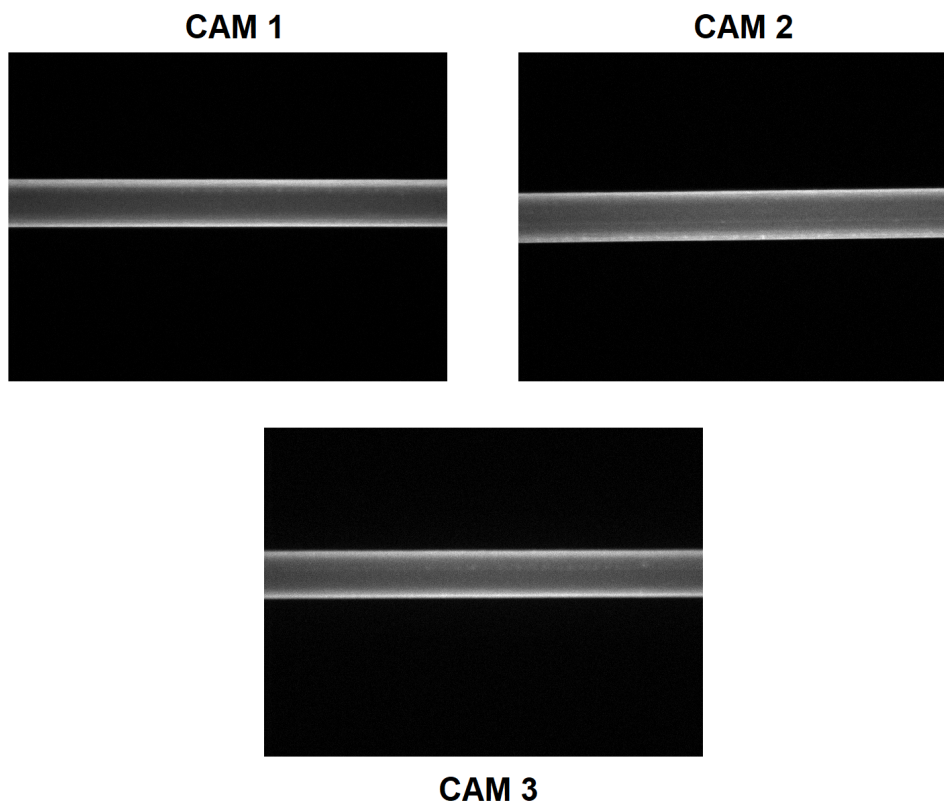
¹Převzato z [3] a upraveno.

1.2. OVALITA VLÁKNA



Obrázek 1.2: Zařízení k měření ovality²

Zařízení se skládá z tří kamer rozmístěných dokola po 120° , z osvětlovacích lamp a kladkového systému, kterým se vlákno navíjí. V jednom úseku navíjecí cesty je umístěna zmíněná trojice kamer, která principem středového promítání snímá vlákno ze tří různých pohledů:



Obrázek 1.3: Pohledy na vlákno

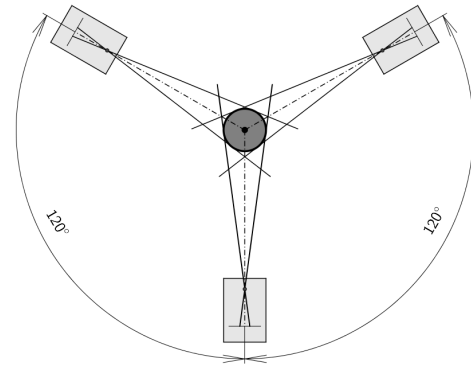
²Překresleno podle archivu pana doc. Ing. Pavla Štarhy, Ph.D.

1.2.3. Předpoklady měření

Z důvodu nepřesně seřízené soustavy kamer a kvůli zmíněným deformacím vlákna se úkol přesně stanovit jeho ovalitu komplikuje. Nejdříve uvažujme dva stavy, ve kterých by se měřicí soustava a zkoumané vlákno mohly (respektive můžou) octnout:

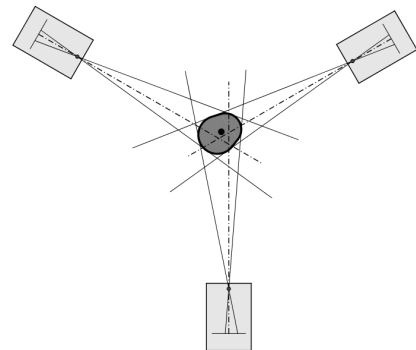
a) *ideální stav*

- kamery jsou rozmístěny po 120°
- optické osy se protínají v jednom bodě
- kamery jsou stejně vzdáleny od vlákna
- vlákno má dokonale kruhový průřez



b) *reálný stav*

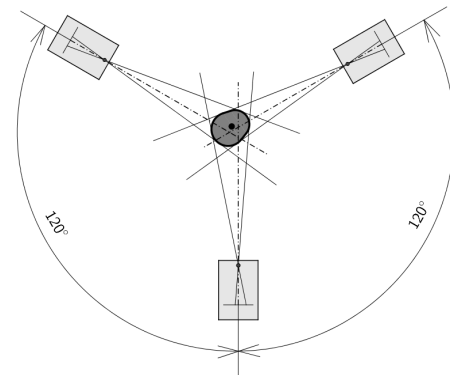
- kamery nejsou rozmístěny po 120°
- optické osy se neprotínají v jednom bodě
- kamery jsou různě vzdáleny od vlákna
- vlákno nemá dokonale kruhový průřez



Stav a) nikdy nenastane a pro stav b) se matematický popis problému komplikuje. Protože soustava kamer je mechanicky seřízena poměrně přesně, ale zároveň se vlákno při průchodu kladkami může vychylovat do stran, budeme uvažovat stav c) definovaný takto:

c) *předpokládaný stav*

- kamery jsou rozmístěny po 120°
- optické osy se neprotínají v jednom bodě
- kamery můžou být různě vzdáleny od vlákna
- vlákno nemá dokonale kruhový průřez



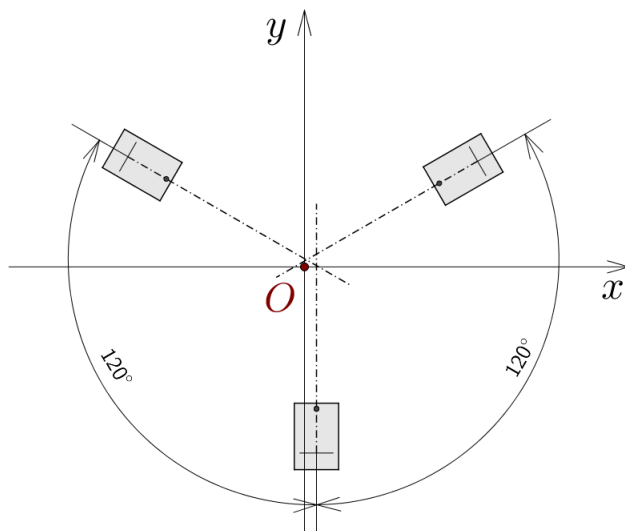
Vzhledem k deformacím zkoumaného vlákna způsobeného pohybem po kladkách nabývá jeho průřez tvaru podobného oválu. Přesně matematicky popsat skutečný průřez

1.2. OVALITA VLÁKNA

ovšem nelze, a proto budeme dále uvažovat, že tímto průřezem je elipsa, kterou nazveme *aproximační elipsou*. Schématický postup, jak tuto elipsu určit, si ukážeme dále.

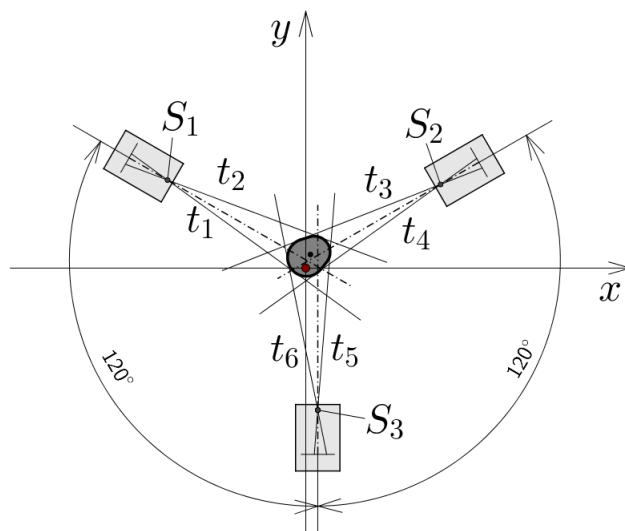
1.2.4. Hledání aproximační elipsy

Abychom byli schopni hledání parametrů průřezu vlákna popsat analyticky, zavedeme nejprve v základním pohledu na měřicí zařízení (viz Obrázek 1.2) pravotočivý kartézský souřadný systém³:



Obrázek 1.4: Souřadný systém v měřicí soustavě

Dále je důležité si uvědomit, že kamery snímají vlákno pomocí středového promítání. Je tedy možné najít parametrická vyjádření přímk, které se opticky dotýkají jeho průřezu:



Obrázek 1.5: Optické tečny průřezu vlákna

Tyto přímky nazýváme *optické tečny průřezu vlákna* a dají se dle Obrázku 1.5 parametricky popsat jako

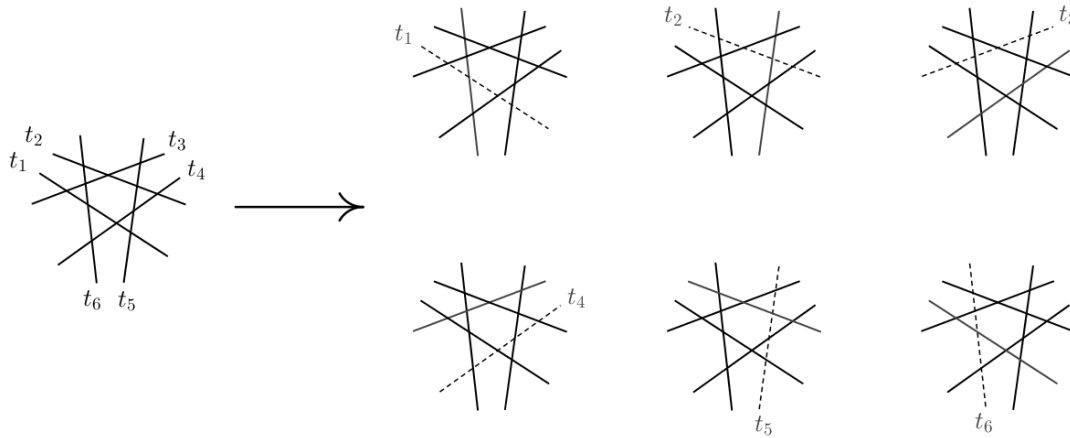
³O volbě počátku a souřadných os více pojednává kapitola 3.2

$$\begin{aligned} t_1 : X_1 &= S_1 + r_1 \mathbf{v}_1, & t_3 : X_3 &= S_2 + r_3 \mathbf{v}_3, & t_5 : X_5 &= S_3 + r_5 \mathbf{v}_5, \\ t_2 : X_2 &= S_1 + r_2 \mathbf{v}_2, & t_4 : X_4 &= S_2 + r_4 \mathbf{v}_4, & t_6 : X_6 &= S_3 + r_6 \mathbf{v}_6, \end{aligned} \quad (1.1)$$

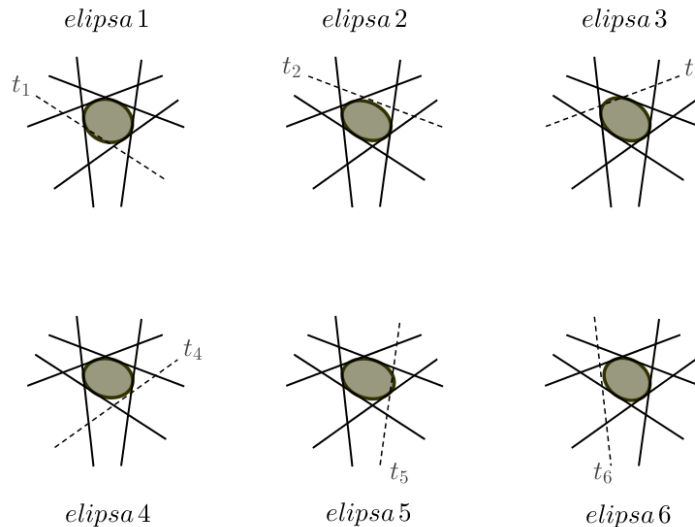
kde $X_i, i = 1, \dots, 6$, je libovolný bod i -té optické tečny, $S_j, j = 1, 2, 3$, je optický střed j -té kamery, $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 6$, je směrový vektor i -té optické tečny a $r_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 6$, parametry.

Máme tedy k dispozici šest přímek, které se opticky dotýkají vláknového průřezu. Obecně ovšem nemusí existovat elipsa, které se dotýká celá šestice přímek, protože (jak bude více rozvedeno v kapitole 2) každá regulární kuželosečka, a tedy i elipsa, je jednoznačně určena pětici tečen splňujících určité předpoklady. Z tohoto důvodu je postup hledání této elipsy následující:

- 1) Z šestice dostupných přímek vybereme všechny jejich možné pětice (vždy zanedbáním jedné přímky), dostáváme tedy $\binom{6}{5} = 6$ různých petic optických tečen:



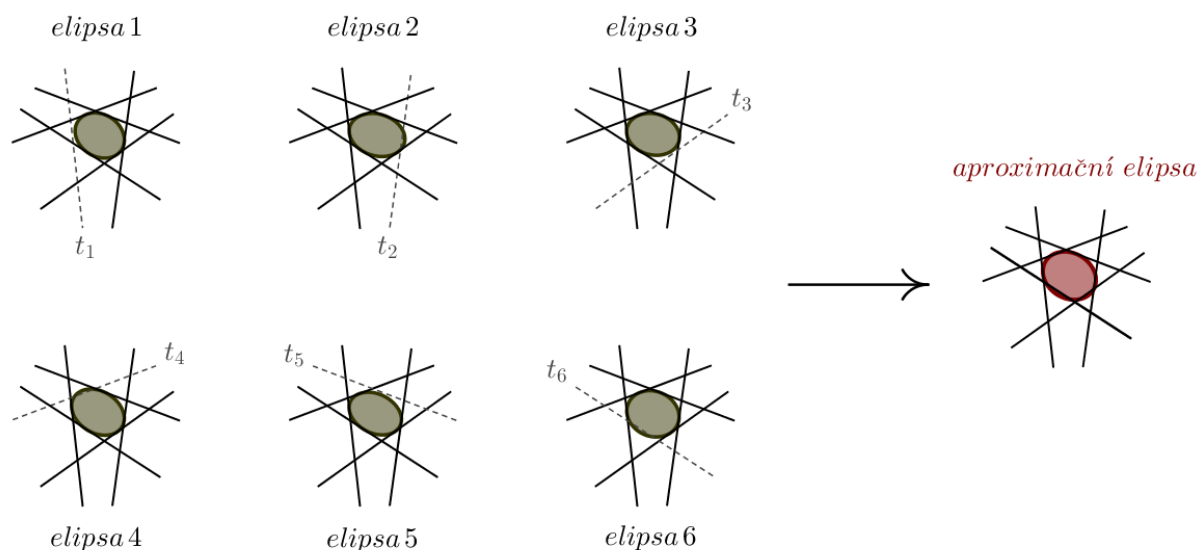
- 2) Pro každou pětici přímek jednoznačně určíme elipsu, které se daná pětice tečen dotýká:



takto určené elipsy potom nazýváme *pomocné elipsy průřezu vlákna*.

1.3. PRŮMĚR VLÁKNA

- 3) Vypočítáme charakteristiky každé této elipsy (délku *hlavní* a *vedlejší poloosy*, *úhel natočení* a *střed*) a u každé charakteristiky určíme její aritmetický průměr. Elipsou s průměrnými hodnotami charakteristik bude právě hledaná aproximační elipsa:

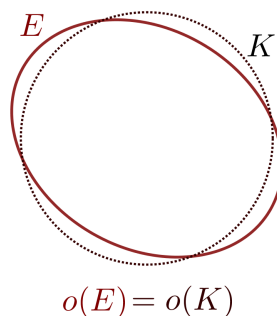
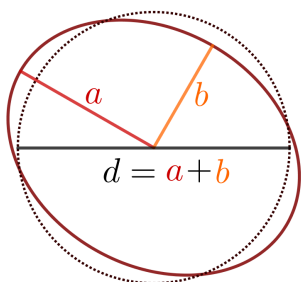


Poznámka. Jak můžeme vidět již z obrázku výše, pomocné elipsy se nemusí dotýkat vyloučené optické tečny a aproximační elipsa obecně nemusí mít styk s žádnou z optických tečen. Naproti tomu v případě, že zkoumané vlákno by skutečně mělo průřez tvaru elipsy, pak by všechny pomocné elipsy byly identické, a tudíž i aproximační elipsa by splývala s libovolnou pomocnou elipsou.

1.3. Průměr vlákna

Další důležitou charakteristikou zkoumaného vlákna je jeho průměr - stejně jako ovalita popsaná aproximační elipsou, je i průměr vlákna smyšlenou veličinou, která se snaží přiblížit tvar průřezu. Známe-li již aproximační elipsu (hlavně délky hlavní a vedlejší poloosy), můžeme s její pomocí průměr vlákna nadefinovat a určit. Nabízejí se např. následující dvě definice průměru:

- součet délky hlavní a vedlejší poloosy:
- průměr kružnice se stejným obvodem, jako má aproximační elipsa:



1. EXTRUDOVANÉ VLÁKNO

Druhá definice může znít komplikovaněji, má ale svoje fyzikální opodstatnění - protože vlákno se používá k výrobě tepelných výměníků, během jejich provozu dutinou vlákna proudí kapalina přenášející teplo, která může mít za následek částečné vypnutí průřezu a přiblížení jeho tvaru ke kruhu. Ať už se průřez vlákna během provozu změní, či nikoliv, můžeme říct, že svůj obvod zachovává. Dále budeme průměrem vlákna tedy myslet veličinu vycházející z druhé definice.

Výše popsaný návod jak určit aproximační elipsu a průměr vlákna byl ale pouze schématický - neřešíme zde, jak určit pomocné elipsy ani neuvádíme způsob, jakým lze vypočítat jejich charakteristiky. Metodami matematického určení těchto elips a jejich charakteristik se bude podrobně zabývat následující kapitola.

2. Matematický výpočet ovality a průměru

Poznámka. Tato kapitola předpokládá u čtenáře určitou znalost analytické geometrie a teorie kuželoseček. Tato teorie je částečně zpracována v [13] a zevrubněji ve skriptu [9].

Jak už bylo naznačeno v kapitole 1, regulární kuželosečku v euklidovské rovině \mathcal{E}_2 (a v jejím projektivním rozšíření, tedy reálné projektivní rovině \mathcal{P}_2) je možné určit např. pomocí pěti různých přímek, které se jí dotýkají, nebo podobně pomocí pěti různých bodů, kterými kuželosečka prochází. Z takových pětic prvků ale obecně nelze kuželosečku určit jednoznačně, následující podkapitola proto popisuje podmínky nutné k jednoznačnosti určení.

2.1. Podmínky jednoznačného určení kuželosečky

Tato podkapitola čerpá převážně z [12]. Není-li uvedeno jinak, pak věty zde zmíněné (i když třeba v upraveném znění) pochází právě odsud.

Věta 2.1.1. *Regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena pěti různými body v \mathcal{P}_2 , kterými tato kuželosečka prochází, jestliže žádné tři z nich neleží na jedné přímce.*

Věta 2.1.2. *Regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena pěti různými přímkami v \mathcal{P}_2 , které se této kuželosečce dotýkají, jestliže se žádné tři z nich neprotínají v jednom bodě.*

Poznámka. Můžeme si všimnout, že předchozí dvě věty mezi sebou vykazují určitou analogii týkající se vztahu bodů a přímek. Tato analogie není náhodná a je projevem obecnější zákonitosti nazývané *princip duality*.

Věta 2.1.3. (Princip duality) *Mějme projektivní rovinu \mathcal{C} definovanou jako incidenceční strukturu ve smyslu množiny P bodů, množiny L přímek a incidencečního vztahu I popisujícího, který bod leží na které přímce. Záměnou bodů a přímek ve vztahu*

$$\mathcal{C} = (P, L, I)$$

dostáváme projektivní rovinu \mathcal{C}^ duální k \mathcal{C} popsanou jako*

$$\mathcal{C}^* = (L, P, I^*),$$

kde I^ je relace inverzní k I . Pokud jsou \mathcal{C} a \mathcal{C}^* izomorfní, nazveme projektivní rovinu \mathcal{C} autoduální. Jestliže je V věta platná v projektivní rovině \mathcal{C} , pak v \mathcal{C} existuje a platí i věta V^* duální k větě V . [7]*

Protože reálná projektivní rovina \mathcal{P}_2 je autoduální, víme, že každá na ní platná věta má v \mathcal{P}_2 také svou duální verzi. [7]

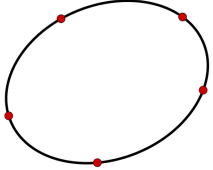
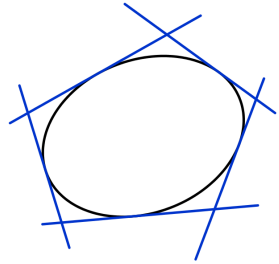
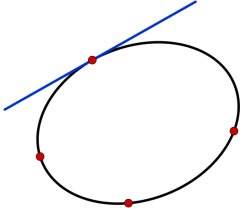
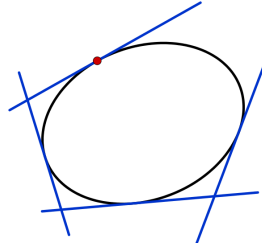
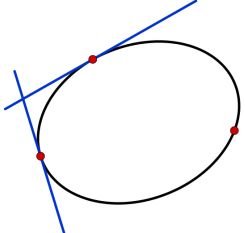
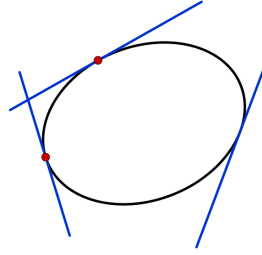
Regulární kuželosečku nemusíme ovšem určovat pouze pomocí pětice stejných prvků, lze to provést také použitím některých dalších kombinací m bodů a n tečných přímek, pokud $m + n = 5$. Díky principu duality pak můžeme formulovat následující dvě věty:

2. MATEMATICKÝ VÝPOČET OVALITY A PRŮMĚRU

Věta 2.1.4. Regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena tečnou s bodem dotyku a třemi dalšími různými body, které neleží na jedné přímce. Duálně lze říci, že regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena tečnou s bodem dotyku a třemi dalšími různými tečnami, které se neprotínají v jednom bodě.

Věta 2.1.5. Regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena dvěma různými tečnami s body dotyku a jedním dalším bodem. Duálně lze říci, že regulární kuželosečka v \mathcal{P}_2 je jednoznačně určena dvěma různými tečnami s body dotyku a jednou další tečnou.

Poznatky z předešlých vět jsou znázorněny následující tabulkou:

| PRIMÁRNĚ | DUÁLNĚ |
|--|--|
| <p>5 bodů</p>  | <p>5 tečen</p>  |
| <p>3 body + 1 tečna s bodem dotyku</p>  | <p>3 tečny + 1 tečna s bodem dotyku</p>  |
| <p>1 bod + 2 tečny s body dotyku</p>  | <p>1 tečna + 2 tečny s body dotyku</p>  |

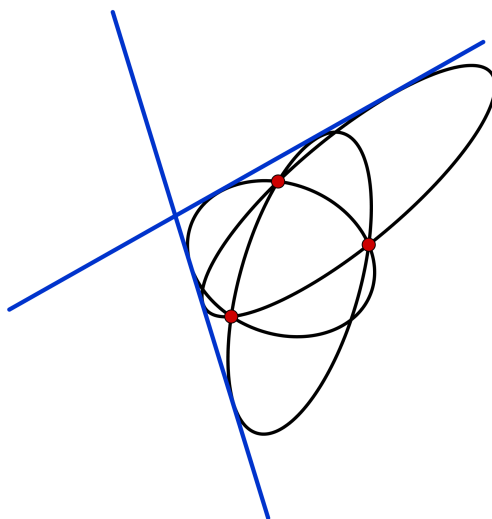
Tabulka 2.1: Způsoby jednoznačného určení regulární kuželosečky¹

¹Převzato z [16] a upraveno.

2.2. GEOMETRICKY-ANALYTICKÝ PŘÍSTUP

Poznámka. Pro jednoznačné určení kuželosečky ze smíšených kombinací m bodů a n tečen (tedy v případech, kdy $m + n = 5$, $m \neq 0$, $n \neq 0$) musí v případě primárního určení každá tečna procházet některým ze zadaných bodů dotyku a v případě duálního určení musí každý bod dotyku ležet na některé ze zadaných tečen.

Pokud bychom např. z poslední primární konfigurace „uvolnili“ body dotyku a umístili je mimo zadané tečny, viděli bychom, že obecně neexistuje pouze jediná kuželosečka, která se zadaných dvou přímkou dotýká a zároveň prochází danými třemi body:



Obrázek 2.1: Nejednoznačné určení kuželosečky z pěti prvků

Protože už víme, jaké podmínky musí nastat pro jednoznačné určení regulární kuželosečky, můžeme tuto znalost použít k určení pomocných elips, o kterých se zmiňovala kapitola 1. V dalším se tedy budeme zabývat tím, jak analyticky získat koeficienty jejich rovnic z dostupných informací, a tím budeme schopni určit i jejich charakteristiky. Způsoby, jak toto provést za předpokladu, že známe ke každé pomocné elipse pětici různých tečen, jsou různé, my se ovšem zaměříme na dva: první je tzv. *geometricky-analytický přístup* a druhý, který nazýváme *ryze analytický přístup*.

2.2. Geometricky-analytický přístup

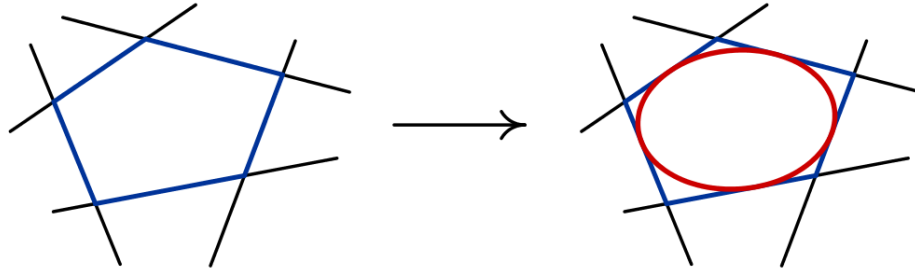
2.2.1. Popis metody

Tento způsob nezjišťuje koeficienty pomocné elipsy přímo z parametrických rovnic pětice optických tečen, ale pro jejich určení používá body, ve kterých se elipsa s těmito tečnami stýká (*body dotyku*). K nalezení bodů dotyku nám pomohou následující dvě věty.

2. MATEMATICKÝ VÝPOČET OVALITY A PRŮMĚRU

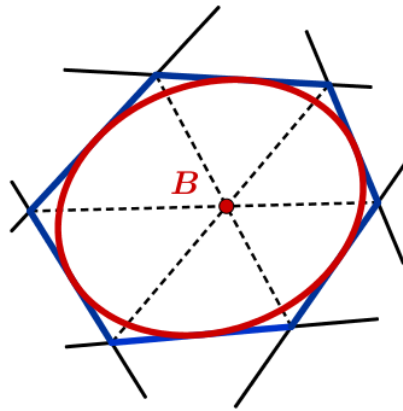
Věta 2.2.1. *Pro každý konvexní nedegenerovaný pětiúhelník existuje právě jedna elipsa jemu vepsaná. [1]*

Poznámka. Je důležité si uvědomit, že optické tečny právě takový pětiúhelník vytínají:



Tato skutečnost nám také později pomůže při hledání bodů dotyku. Zmiňme následující větu:

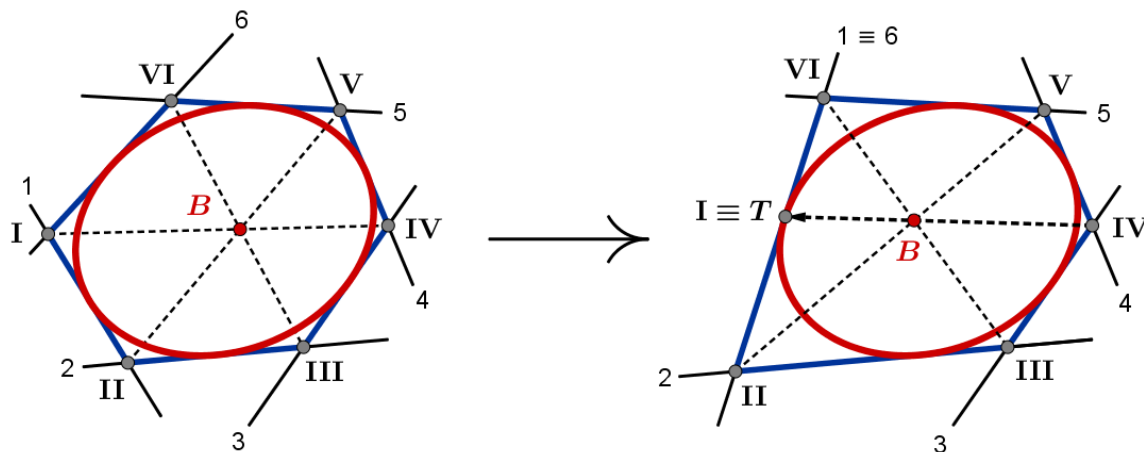
Věta 2.2.2. (Brianchonova věta pro elipsu) *Jestliže konvexní šestiúhelník opisuje elipsu, pak jeho tři diagonály se protínají v jednom bodě. Naopak, pokud se všechny tři diagonály konvexního šestiúhelníku protínají v jednom bodě, pak existuje právě jedna elipsa jemu opsaná. [1]*



Poznámka. Bod z předchozí věty, ve kterém se protínají diagonály, nazýváme *Brianchonův bod*.

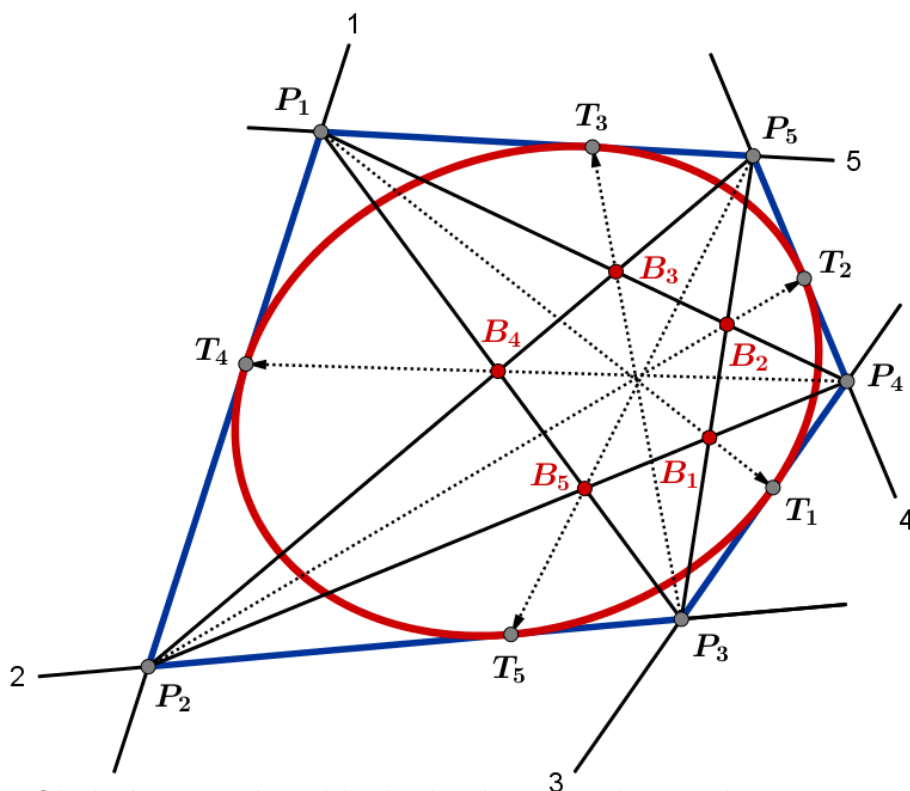
Brianchonova věta pro elipsu se sice vztahuje k šestiúhelníku, její limitní případ však skvěle poslouží k nalezení bodů dotyku. Označme nejprve vrcholy šestiúhelníku **I, II, III, IV, V, VI** a přímky, které těmito vrcholy prochází, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dále uvažujme, že dvě z těchto přímek (např. 1 a 6) splynou v jedinou přímku:

2.2. GEOMETRICKY-ANALYTICKÝ PŘÍSTUP



Dostáváme tedy konvexní pětiúhelník opsaný elipse. Z obrázku výše můžeme vidět, že po splnutí přímek 1 a 6 do přímky jedné došlo také ke splnutí vrcholu I s bodem dotyku T na této přímce.

Pokud tedy chceme geometricky určit místo dotyku optické tečny a pomocné elipsy, můžeme tak učinit pomocí průsečíků pětice optických tečen, které tvoří vrcholy konvexního pětiúhelníku. Po zvolení přímky, na které chceme najít bod dotyku, sestojíme diagonály z vrcholů dvou přilehlých stran pětiúhelníku; jejich průsečík je Brianchonův bod pro zvolenou přímku. Bod, ve kterém pak protne spojnice tohoto Brianchonova bodu a protilehlého vrcholu pětiúhelníku zvolenou přímku, je hledaným bodem dotyku. Takto určíme tedy body dotyku na každé z optických tečen:



Obrázek 2.2: Nalezení bodů dotyku pomocí Brianchonovy věty

Touto konstrukcí nám uvnitř pětiúhelníku vznikne tzv. *diagonální pentagram*, jehož vnitřní průsečíky jsou Brianchonovými body. Vytvoříme-li spojnice těchto bodů a protějších vrcholů, pak protnutím příslušných stran dostáváme všech pět bodů dotyku.

Poznámka. Tento způsob hledání bodů dotyku za použití uvedených vět je typický zvláště pro elipsu. K nalezení bodů dotyku s obecnou kuželosečkou se dá užít i dalších konstrukcí a principů vycházejících z projektivní geometrie. Pro detailnější rozbor této problematiky viz např. [16].

2.2.2. Výpočet koeficientů pomocné elipsy

V této části si ukážeme, jak z pěti nalezených tečných bodů vypočítat koeficienty pomocné elipsy, a tím i její rovnici. Pomocná elipsa má stejně jako každá regulární kuželosečka obecnou rovnici v nehomogenních kartézských souřadnicích tvaru

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.1)$$

Dále označme body dotyku nalezené v předchozí části a jejich nehomogenní kartézské souřadnice jako $T_i = [x_i; y_i]$ pro $i = 1, \dots, 5$. Protože každý bod dotyku je i prvkem pomocné elipsy, tedy $T_i \in \mathcal{K} \quad \forall i = 1, \dots, 5$, musí platit

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2 + 2a_{23}y_2 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_3^2 + 2a_{12}x_3y_3 + a_{22}y_3^2 + 2a_{13}x_3 + 2a_{23}y_3 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_4^2 + 2a_{12}x_4y_4 + a_{22}y_4^2 + 2a_{13}x_4 + 2a_{23}y_4 + a_{33} &= 0, \\ a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + a_{22}y_5^2 + 2a_{13}x_5 + 2a_{23}y_5 + a_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

anebo v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ 2a_{12} \\ a_{22} \\ 2a_{13} \\ 2a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Víme, že aby křivka vyjádřená rovnicí (2.1) byla vůbec kuželosečkou, musí být alespoň jeden z koeficientů kvadratické formy nenulový, tedy $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$. Z toho vidíme, že vektor koeficientů (a_{ij}) v maticové rovnici (2.3) je nenulový, tím pádem musí být matice soustavy vystupující v této rovnici singulární, neboli

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Laplaceovým rozvojem determinantu z předchozí rovnice (2.4) podle prvního řádku dostáváme

2.2. GEOMETRICKÝ-ANALYTICKÝ PŘÍSTUP

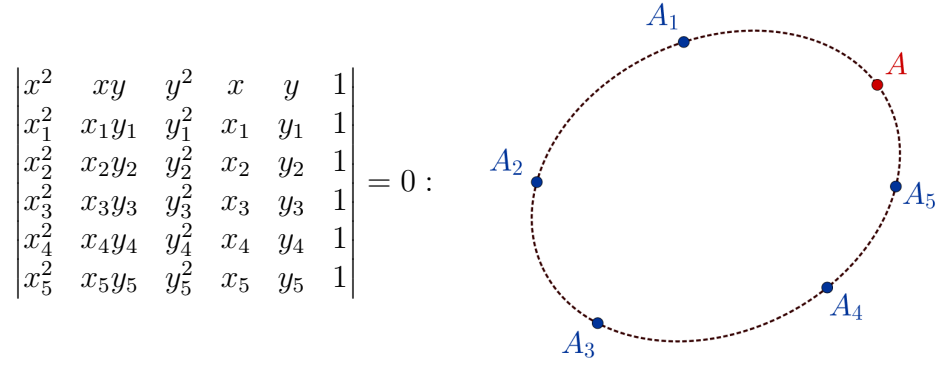
$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} x^2 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} xy + \\
& + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} y^2 + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix} x + \\
& + (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix} y + (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix} 1 = 0.
\end{aligned}$$

V porovnání s rovnicí (2.1) můžeme vidět, že pomocí Laplaceova rozvoje jsme z determinantu výše dostali obecnou rovnici kuželosečky. Z tohoto porovnání tedy plyne přímý výpočet koeficientů pomocné elipsy:

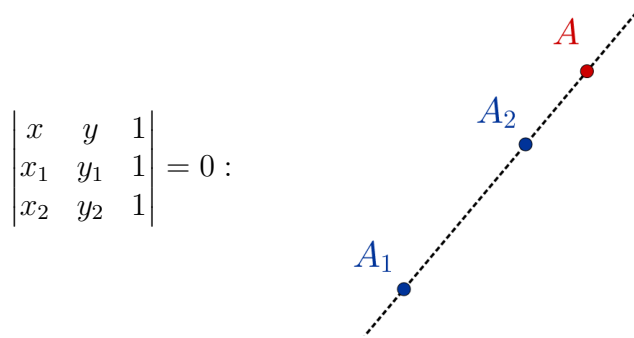
$$\begin{aligned}
a_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{2} \\
a_{22} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, & a_{13} &= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & y_5 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{2} \\
a_{23} &= (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{2}, & a_{33} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ & \vdots & & & \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Poznámka. Rovnice (2.4) vyjadřuje jednoznačné určení kuželosečky z pěti bodů v souladu s Větou 2.1.1. Dá se interpretovat tak, že k takovým pěti bodům $A_i = [x_i; y_i]$, $i = 1, \dots, 5$, které splňují předpoklady Věty 2.1.1, každý šestý obecný bod $A = [x; y]$ vyhovující této rovnici leží právě na jedné kuželosečce.

Podobně se dá interpretovat taky determinantová rovnice určující jednoznačně přímku pomocí dvou různých bodů $A_1 = [x_1; y_1]$, $A_2 = [x_2; y_2]$. [11]



Obrázek 2.3: Rovnice kuželosečky z pěti známých bodů



Obrázek 2.4: Rovnice přímky ze dvou známých bodů

2.3. Ryze analytický přístup

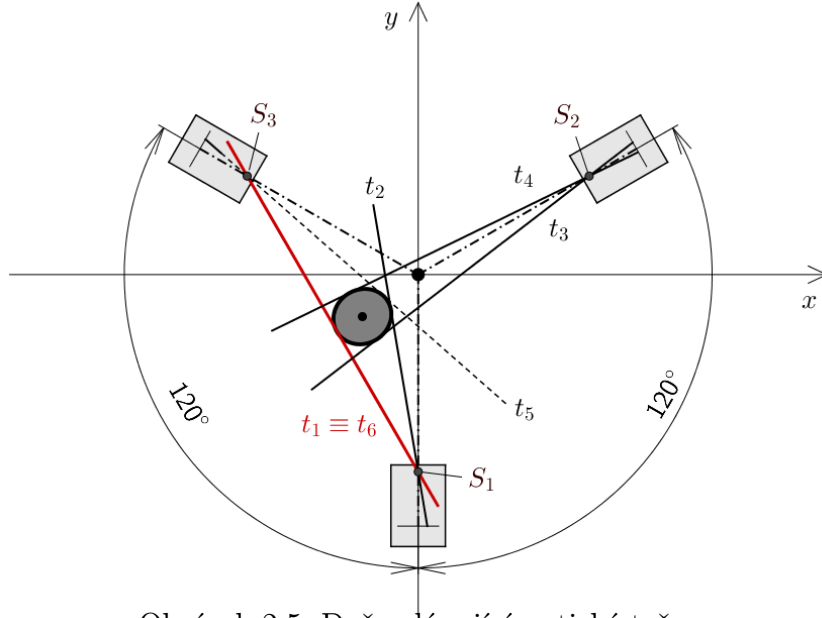
2.3.1. Popis metody

Na rozdíl od geometricky-analytického přístupu, který převádí problém určení koeficientů pomocné elipsy z pěti optických tečen na úlohu výpočtu těchto koeficientů z pěti bodů dotyku, ryze analytický přístup zjišťuje tyto koeficienty pouze analyticky, a to přímo pomocí parametrických rovnic optických tečen bez nutnosti hledání bodů dotyku.

Díky Větě 2.1.2 a uspořádání měřicí soustavy a zkoumaného vlákna, které předpoklady této věty zaručuje, můžeme říci, že pomocná elipsa určená pěticí optických tečen je těmito tečnami vždy určena jednoznačně.

Poznámka. Aby předpoklady Věty 2.1.2 nebyly splněny, musely by se alespoň tři z pěti optických tečen protínat v jednom bodě. Taková možnost je ale vzhledem k poloze a velikosti vlákna vůči vzdálenosti a poloze optických středů kamer vyloučena. Další případ nesplnění předpokladů zmíněné věty by byla situace, kdy alespoň dvě optické tečny splynou v jedinou přímku; to by se stalo v případě, že vlákno by se opticky dotýkalo spojnice dvou optických středů kamer, ani tento případ však nemůže z výše uvedených důvodů nastat.

2.3. RYZE ANALYTICKÝ PŘÍSTUP



Obrázek 2.5: Dvě splývající optické tečny

Z obrázku 2.5 výše vidíme, že z optických tečen t_1, t_2, t_3, t_4 a t_6 bychom v tomto případě pomocnou elipsu nemohli jednoznačně určit. I když se ale ve skutečnosti zkoumané vlákno vychyluje do stran, stále je navíjeno kladkou, a tím pádem setrvává v blízkém okolí středu soustavy, tento stav tedy nebudeme uvažovat.

2.3.2. Výpočet koeficientů pomocné elipsy

K analytickému určení koeficientů a_{ij} pomocné elipsy máme obecně k dispozici pětici přímek parametricky vyjádřených jako

$$\begin{aligned} p_1 : X_1 &= A_1 + r_1 \mathbf{v}_1, \\ p_2 : X_2 &= A_2 + r_2 \mathbf{v}_2, \\ p_3 : X_3 &= A_3 + r_3 \mathbf{v}_3, \\ p_4 : X_4 &= A_4 + r_4 \mathbf{v}_4, \\ p_5 : X_5 &= A_5 + r_5 \mathbf{v}_5, \end{aligned} \tag{2.5}$$

kde $X_i, i = 1, \dots, 5$, je libovolný bod i -té přímky, $A_i, i = 1, \dots, 5$, je počáteční bod i -té přímky (v našem případě vždy jeden z optických středů kamer, tj. S_1, S_2 nebo S_3), $r_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, 5$ parametr a $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 5$, směrový vektor i -té přímky.

Z těchto informací pak hledáme pomocnou elipsu ve tvaru obecné rovnice kuželosečky

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{2.6}$$

Protože přímky p_i jsou zadány parametricky a pomocnou elipsu se snažíme určit v implicitním tvaru, převedeme vyjádření přímek ze soustavy 2.5 na obecné rovnice:

2. MATEMATICKÝ VÝPOČET OVALITY A PRŮMĚRU

$$\begin{aligned}
 p_1 : k_1x + l_1y + m_1 &= 0, \\
 p_2 : k_2x + l_2y + m_2 &= 0, \\
 p_3 : k_3x + l_3y + m_3 &= 0, \\
 p_4 : k_4x + l_4y + m_4 &= 0, \\
 p_5 : k_5x + l_5y + m_5 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde $k_i, l_i, m_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, 5$.

Vzájemný vztah kuželosečky a tečny v obecném tvaru pak popisuje následující věta.

Věta 2.3.1. *Nechť $p : kx + ly + m = 0$ je přímka v \mathcal{E}_2 a*

$$\mathcal{K} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

je kuželosečka v \mathcal{E}_2 . Přímka p je pak tečnou kuželosečky \mathcal{K} právě tehdy, když

$$\begin{aligned}
 &(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)k^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)l^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)m^2 + \\
 &+ 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})lm + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})km + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})kl = 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Idea důkazu. Vyjádříme-li přímku p v explicitním tvaru $y = f(x)$ (tj. $y = \frac{-kx-m}{l}$) a tento tvar následně dosadíme do rovnice kuželosečky \mathcal{K} , dostaneme kvadratickou rovnici v proměnné x :

$$x^2(a_{11} - 2a_{12}\frac{k}{l} + a_{22}\frac{k^2}{l^2}) + x(-2a_{12}\frac{m}{l} + 2a_{22}\frac{mk}{l^2} + 2a_{13} - 2a_{23}\frac{k}{l}) + a_{22}\frac{m^2}{l^2} - 2a_{23}\frac{m}{l} + a_{33} = 0$$

Z analytické geometrie víme, že přímka p je tečnou ke kuželosečce právě tehdy, když je determinant této kvadratické rovnice roven nule. Po několika algebraických úpravách by se nakonec došlo k řešení, které nám předkládá rovnost (2.8). V případě, že bychom nemohli přímku p vyjádřit ve směrnicovém tvaru (tj. jednalo by se o přímku bez směrnice), mohli bychom ji zapsat ve formě $x = g(y)$ a stejně jako v předchozím případě ji dosadit do rovnice kuželosečky. Důkaz by dále postupoval analogicky a došel ke stejnému výsledku. Pro celý důkaz viz [20].

Poznámka. Napišeme-li determinant matice kuželosečky

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

je možné si všimnout, že členy vystupující v rovnosti (2.8) se rovnají subdeterminantům (*minorům*) 2. řádu tohoto determinantu. Rovnost (2.8) lze tedy přepsat jako

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} k^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} l^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} m^2 + \\
 &+ 2 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{12} \end{vmatrix} lm + 2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} km + 2 \begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} kl = 0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Díky větě 2.3.1 a skutečnosti, že přímky p_i se dotýkají kuželosečky $\mathcal{K} \ \forall i = 1, \dots, 5$, platí

2.3. RYZE ANALYTICKÝ PŘÍSTUP

$$\begin{pmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2m_2 & k_2m_2 & k_2l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3m_3 & k_3m_3 & k_3l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4m_4 & k_4m_4 & k_4l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \\ a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) \\ 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Význam této soustavy rovnic ukazuje následující věta.

Věta 2.3.2. *Je-li \mathcal{K} regulární kuželosečka a přímky $p_i, i = 1, \dots, 5$, takové, že platí soustava (2.10), pak je determinant matice této soustavy singulární, tj.*

$$\begin{vmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2m_2 & k_2m_2 & k_2l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3m_3 & k_3m_3 & k_3l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4m_4 & k_4m_4 & k_4l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

Důkaz. Stejně jako u soustavy (2.3) i zde plyne singularita matice soustavy z nenulovosti vektoru neznámých. Tento vektor je v našem případě vektorem minorů druhého řádu determinantu matice kuželosečky.

Jelikož se platnost věty vztahuje na regulární kuželosečku, stačí tento důkaz provést pro elipsu, hyperbolu a parabolu.

Pro elipsu a hyperbolu je nenulovost vektoru neznámých zaručena tím, že se jedná o středové kuželosečky; člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ je totiž zároveň determinantem kvadratické formy kuželosečky (tj. $|\bar{\mathbf{A}}|$), který rozhoduje o tom, zda má kuželosečka nějaký vlastní střed. Tento determinant je v případě elipsy a hyperboly nenulový, tudíž i vektor neznámých je nenulový.

V případě paraboly je důkaz o nenulovosti vektoru neznámých komplikovanější a provedeme ho sporem. Parabola je kuželosečka regulární, tzn. determinant její matice je různý od nuly ($|\mathbf{A}| \neq 0$), a také kuželosečka nestředová, tedy determinant matice její kvadratické formy je nulový ($|\bar{\mathbf{A}}| = 0$). Rozepíšeme-li zmíněné determinanty, pak musí pro parabolu platit

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 \neq 0 \quad \wedge \quad |\bar{\mathbf{A}}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Pokud $|\mathbf{A}|$ upravíme na tvar

$$|\mathbf{A}| = a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2$$

vidíme, že první člen takto rozepsaného determinantu $|\mathbf{A}|$ musí být nulový, pro parabolu tedy dostáváme podmínky

$$2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 \neq 0 \quad \wedge \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \quad (2.12)$$

Budeme-li dále uvažovat všechny případy, pro které je vektor neznámých naopak roven nulovému vektoru, vyjdou nám tři možné sady řešení, pro které ukážeme spor s vlastnostmi paraboly, a tím platnost věty pro parabolu:

2. MATEMATICKÝ VÝPOČET OVALITY A PRŮMĚRU

1. $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$:

Vzhledem k nulovosti všech koeficientů se nemůže jednat o parabolu (ani o jinou kuželosečku), navíc je toto řešení ve sporu s první podmínkou z výčtu (2.12).

2. $a_{11}a_{22} = a_{12}^2, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$:

Nulovost koeficientů a_{13}, a_{23} a a_{33} po dosazení nevyhovuje první podmínce z výčtu (2.12), nemůže se tedy jednat o parabolu a dostáváme spor.

3. $a_{11}a_{33} = a_{13}^2, a_{12}a_{33} = a_{13}a_{23}, a_{22}a_{33} = a_{23}^2, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$:

Po dosazení této sady řešení do první podmínky z výčtu (2.12) můžeme psát

$$\begin{aligned} 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 &= 2a_{12}^2a_{33} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} = \\ &= 2a_{33}(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -2a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Protože podle druhé podmínky z výčtu (2.12) musí být člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, dostáváme spor.

□

Učiníme-li Laplaceův rozvoj determinantu v rovnici (2.11) podle jeho prvního řádku (stejně jako v rovnici 2.4), dostaneme

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2m_2 & k_2m_2 & k_2l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3m_3 & k_3m_3 & k_3l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4m_4 & k_4m_4 & k_4l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} k^2 + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} l^2 + \\ &+ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} m^2 + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & k_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & k_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} lm + \\ &+ (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1l_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5l_5 \end{vmatrix} km + (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1m_1 & k_1m_1 \\ & & \vdots & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5m_5 & k_5m_5 \end{vmatrix} kl = 0. \end{aligned}$$

Z porovnání rovnice výše a rovnice (2.8) můžeme vidět, čemu se rovnají členy z vektoru neznámých v soustavě (2.10). Pokud zavedeme členy $D_i, i = 1, \dots, 6$ následujícím způsobem:

2.3. RYZE ANALYTICKÝ PŘÍSTUP

$$\begin{aligned}
D_1 &:= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ l_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix}, & D_2 &:= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} k_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ k_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix}, \\
D_3 &:= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ k_5^2 & l_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix}, & D_4 &:= (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \\
D_5 &:= (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 l_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, & D_6 &:= (-1)^{1+6} \begin{vmatrix} k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

pak musí platit

$$\begin{aligned}
a_{22}a_{33} - a_{23}^2 &= D_1, \\
a_{11}a_{33} - a_{13}^2 &= D_2, \\
a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= D_3, \\
a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} &= D_4, \\
a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} &= D_5, \\
a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} &= D_6,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

což je soustava šesti nelineárních rovnic pro šest neznámých $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Když zavedeme pomocné členy

$$\begin{aligned}
Q &:= D_1 D_2 D_3 - D_1 D_4^2 - D_2 D_5^2 - D_3 D_6^2 + 2D_4 D_5 D_6, \\
P_{11} &:= D_2 D_3 - D_4^2, \\
P_{12} &:= D_3 D_6 - D_4 D_5, \\
P_{22} &:= D_1 D_3 - D_5^2, \\
P_{13} &:= D_2 D_5 - D_4 D_6, \\
P_{23} &:= D_1 D_4 - D_5 D_6, \\
P_{33} &:= D_1 D_2 - D_6^2,
\end{aligned}$$

pak má soustava (2.13) dvě sady řešení lišící se znaménkem ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \mp P_{11} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{12} &= \pm P_{12} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{22} &= \mp P_{22} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{13} &= \pm P_{13} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{23} &= \pm P_{23} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}, \\
a_{33} &= \mp P_{33} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Podle soustavy (2.14) by tedy hledaná pomocná elipsa (či obecně regulární kuželosečka) měla rovnici

$$\mathcal{K} : \mp P_{11} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} x^2 \pm 2P_{12} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} xy \mp P_{22} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} y^2 \pm 2P_{13} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} x \pm 2P_{23} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} y \mp P_{33} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

2. MATEMATICKÝ VÝPOČET OVALITY A PRŮMĚRU

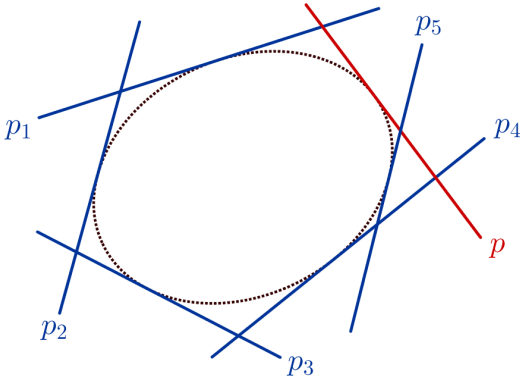
Pomocný člen $Q^{-\frac{1}{2}}$ ovšem může vycházet jako komplexní číslo a dále působit komplikace při výpočtu charakteristik kuželosečky. Po vynásobení zmíněné rovnice kuželosečky \mathcal{K} číslem $Q^{\frac{1}{2}}$ získáme novou rovnici

$$\mathcal{K} : \mp P_{11}x^2 \pm 2P_{12}xy \mp P_{22}y^2 \pm 2P_{13}x \pm 2P_{23}y \mp P_{33} = 0, \quad (2.15)$$

můžeme tedy použít jednu ze sad nových (reálných) koeficientů kuželosečky (a_{ij}^*) , pro které platí

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= \mp P_{11}, \\ a_{12}^* &= \pm P_{12}, \\ a_{22}^* &= \mp P_{22}, \\ a_{13}^* &= \pm P_{13}, \\ a_{23}^* &= \pm P_{23}, \\ a_{33}^* &= \mp P_{33}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Poznámka. Rovnice (2.11) vyjadřuje jednoznačné určení kuželosečky z pěti tečen v souladu s Větou 2.1.2. Dá se interpretovat tak, že k takovým pěti přímkám $p_i : k_i x + l_i y + m_i = 0$, $i = 1, \dots, 5$, které splňují předpoklady Věty 2.1.2, se každá šestá obecná přímka $p : kx + ly + m = 0$ vyhovující této rovnici dotýká právě jedné kuželosečky:

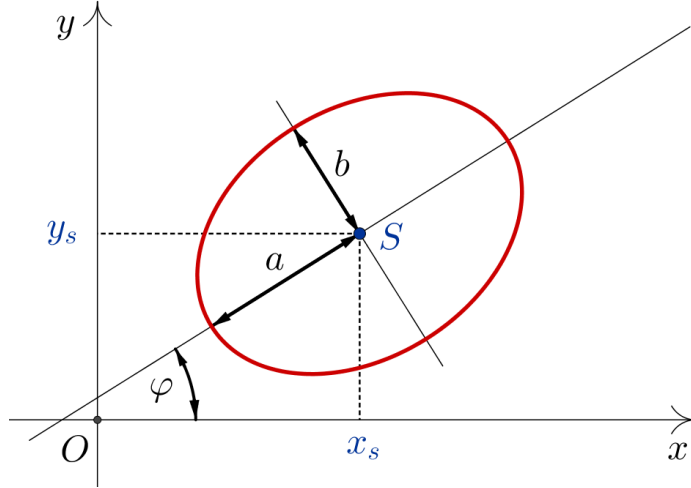
$$\begin{vmatrix} k^2 & l^2 & m^2 & lm & km & kl \\ k_1^2 & l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & k_1 m_1 & k_1 l_1 \\ k_2^2 & l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 & k_2 m_2 & k_2 l_2 \\ k_3^2 & l_3^2 & m_3^2 & l_3 m_3 & k_3 m_3 & k_3 l_3 \\ k_4^2 & l_4^2 & m_4^2 & l_4 m_4 & k_4 m_4 & k_4 l_4 \\ k_5^2 & l_5^2 & m_5^2 & l_5 m_5 & k_5 m_5 & k_5 l_5 \end{vmatrix} = 0 :$$


Obrázek 2.6: Kuželosečka jako obálka přímek

2.4. Výpočet charakteristik pomocné elipsy z jejích koeficientů

Protože už dokážeme analyticky určit koeficienty pomocné elipsy (ať už jedním či druhým přístupem), ukážeme si v této kapitole, jak z nich vypočítat její *charakteristiky*, především *délku hlavní poloosy* a , *délku vedlejší poloosy* b , *polohu středu* $S = [x_s; y_s]$ a *úhel natočení* φ definovaný jako úhel mezi hlavní osou elipsy a kladnou částí hlavní souřadné osy.

2.4. VÝPOČET CHARAKTERISTIK POMOCNÉ ELIPSY Z JEJÍCH KOEFICIENTŮ



Obrázek 2.7: Charakteristiky elipsy

Poloha středu S

Z teorie kuželoseček plyne, že pro souřadnice středu $S = [x_s; y_s]$ středové kuželosečky \mathcal{K} musí platit

$$a_{11}x_s + a_{12}y_s + a_{13} = 0,$$

$$a_{12}x_s + a_{22}y_s + a_{23} = 0,$$

což je soustava lineárních rovnic pro dvě neznámé x_s, y_s a dá se vyjádřit v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Soustava lineárních rovnic v tomto tvaru se dá vyřešit např. pomocí Cramerova pravidla, dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ y_s &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Poznámka. Protože člen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ je zároveň determinantom kvadratické formy (tj. $|\bar{\mathbf{A}}|$) kuželosečky \mathcal{K} , která je v našem případě středová, musí platit, že $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Výpočet podílem podle Cramerova pravidla ve vzorci (2.18) je tudíž korektní, pro středovou kuželosečku vždy použitelný a dá se přepsat pomocí invariantu $|\bar{\mathbf{A}}|$ jako

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{|\bar{\mathbf{A}}|} \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{A}}|} (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \\ y_s &= \frac{1}{|\bar{\mathbf{A}}|} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{A}}|} (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Délka hlavní poloosy a , délka vedlejší poloosy b

K výpočtu těchto veličin využijeme charakteristickou rovnici a invarianty kuželosečky z [13]. Jestliže přepíšeme charakteristickou rovnici kuželosečky pomocí těchto invariantů, dostáváme z původního tvaru

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0$$

její novou formu

$$\lambda^2 - T\lambda + |\bar{\mathbf{A}}| = 0. \quad (2.20)$$

Tato kvadratická rovnice má pak dvě řešení λ_1, λ_2 , kde $\lambda_1 \geq \lambda_2$:

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4|\bar{\mathbf{A}}|}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4|\bar{\mathbf{A}}|}}{2}. \quad (2.21)$$

Pro druhé mocniny délek hlavní a vedlejší poloosy elipsy pak platí (viz např. [11])

$$\begin{aligned} a^2 &= -\frac{1}{\lambda_2} \frac{|\mathbf{A}|}{|\bar{\mathbf{A}}|} = -\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda_1 \lambda_2^2}, \\ b^2 &= -\frac{1}{\lambda_1} \frac{|\mathbf{A}|}{|\bar{\mathbf{A}}|} = -\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda_1^2 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Po úpravě nakonec dostáváme ze vztahů (2.22) vzorce pro přímý výpočet a a b pomocí invariantů:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2|\mathbf{A}|}{|\bar{\mathbf{A}}| \left(\sqrt{T^2 - 4|\bar{\mathbf{A}}|} - T \right)}}, \\ b &= \sqrt{\frac{2|\mathbf{A}|}{|\bar{\mathbf{A}}| \left(-\sqrt{T^2 - 4|\bar{\mathbf{A}}|} - T \right)}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Úhel natočení φ

Pro výpočet úhlu natočení elipsy rozlišujeme čtyři způsoby výpočtu v závislosti na tom, jaké má kvadratická forma elipsa koeficienty: [21]

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_{12} = 0, a_{11} < a_{22}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } a_{12} = 0, a_{11} > a_{22}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \right) & \text{pro } a_{12} \neq 0, a_{11} < a_{22}, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \right) & \text{pro } a_{12} \neq 0, a_{11} > a_{22}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Poznámka. Ze vzorce (2.24) můžeme vidět, že natočení elipsy skutečně záleží jen na její kvadratické formě. Pro $a_{12} = 0$ dostáváme elipsu v tzv. *normální poloze*, tedy její hlavní a vedlejší poloosa jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému.

2.5. Výpočet ovality a průměru

Protože již víme, jak určit pomocné elipsy, dokážeme určit i ovalitu popsanou aproximační elipsou a průměr.

Ovalita

Výpočet ovality provedeme v souladu se schématem v podkapitole 1.2 - charakteristiky aproximační elipsy budou tedy nabývat průměrných hodnot charakteristik pomocných elips.

Pokud označíme i -tou pomocnou elipsu jako $E_i = \{a_i, b_i, x_{S_i}, y_{S_i}, \varphi_i\}$, $i = 1, \dots, 6$, a aproximační elipsu jako $E = \{a, b, x_S, y_S, \varphi\}$, pak platí

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_1 + \dots + a_6}{6}, \\ b &= \frac{b_1 + \dots + b_6}{6}, \\ x_S &= \frac{x_{S_1} + \dots + x_{S_6}}{6}, \\ y_S &= \frac{y_{S_1} + \dots + y_{S_6}}{6}, \\ \varphi &= \frac{\varphi_1 + \dots + \varphi_6}{6}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Průměr

Jak bylo zmíněno v podkapitole 1.3, průměr vlákna určíme jako průměr kružnice, která má stejný obvod jako aproximační elipsa. Zavedeme-li *úplný eliptický integrál II. druhu* jako

$$I(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$$

a *excentricitu elipsy* jako $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, pak obvod aproximační elipsy E je roven

$$o(E) = 4aI(e), \tag{2.26}$$

neboli

$$o(E) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \, d\theta. \tag{2.27}$$

Nemáme-li k dispozici nástroj pro výpočet eliptického integrálu, můžeme použít některý z přibližných vzorců pro výpočet obvodu elipsy, např. jeden z Ramanujanových vzorců²:

$$o_R(E) = \pi(a+b) \left(1 + \frac{3\lambda^2}{10 + \sqrt{4 - 3\lambda^2}} \right), \tag{2.28}$$

kde $\lambda = \frac{a-b}{a+b}$. Nakonec snadno spočteme průměr vlákna d :

$$d = \frac{o(E)}{\pi}. \tag{2.29}$$

²Pro více o obvodu elipsy a jeho přibližných výpočtech viz [2]

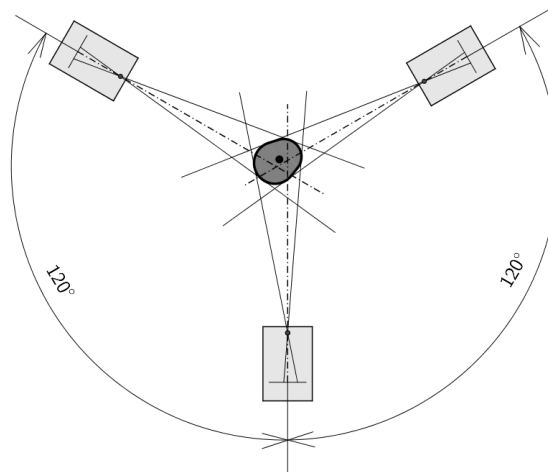
3. Kalibrace kamerového systému

Abychom byli schopni analyzovat snímky extrudovaného vlákna, je nejdříve nutné kamerový systém *zkalibrovat*, tedy nalézt (nebo spíše co nejpřesněji odhadnout) charakteristiky popisující jeho optické a digitální vlastnosti a prostorové rozložení. Teorie následující podkapitoly vychází z [8].

3.1. Kamerový systém

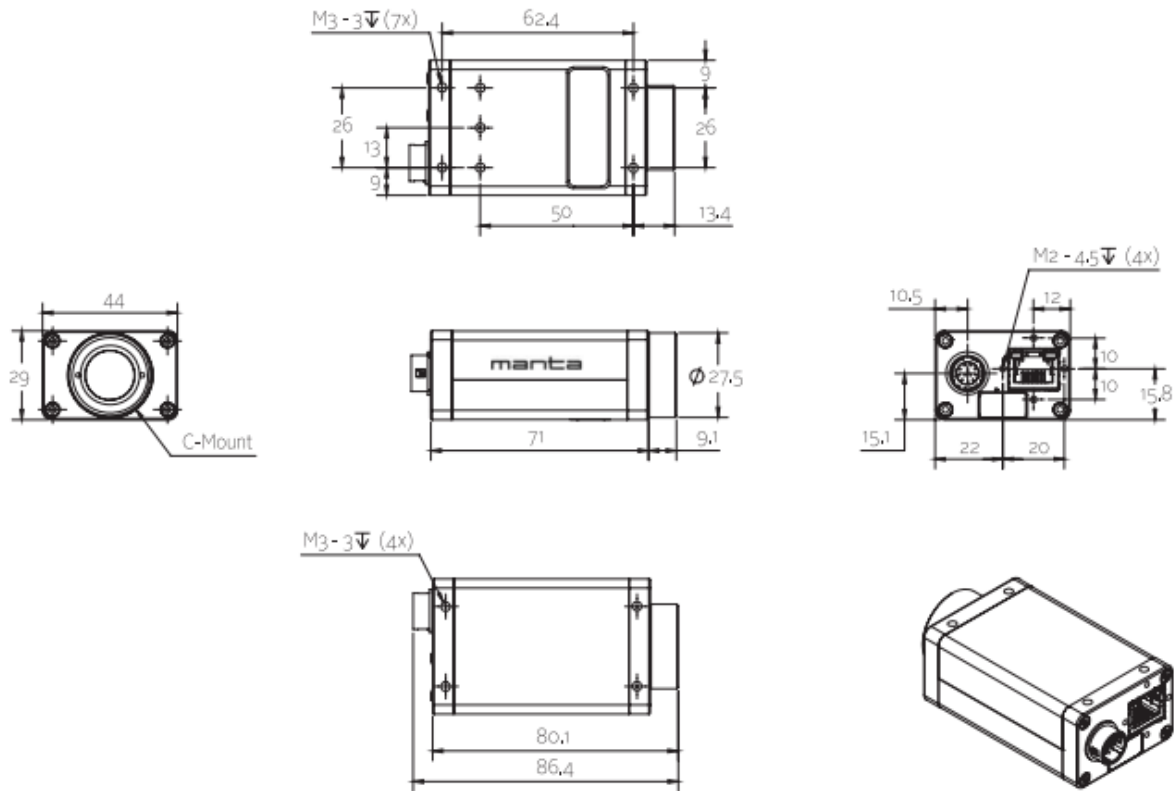
Jak bylo naznačeno v kapitole 1, kamerový systém se skládá ze tří kamer, u kterých uvažujeme následující:

- kamery jsou rozmístěny po 120°
- optické osy se neprotínají v jednom bodě
- kamery mohou být různě vzdáleny od vlákna



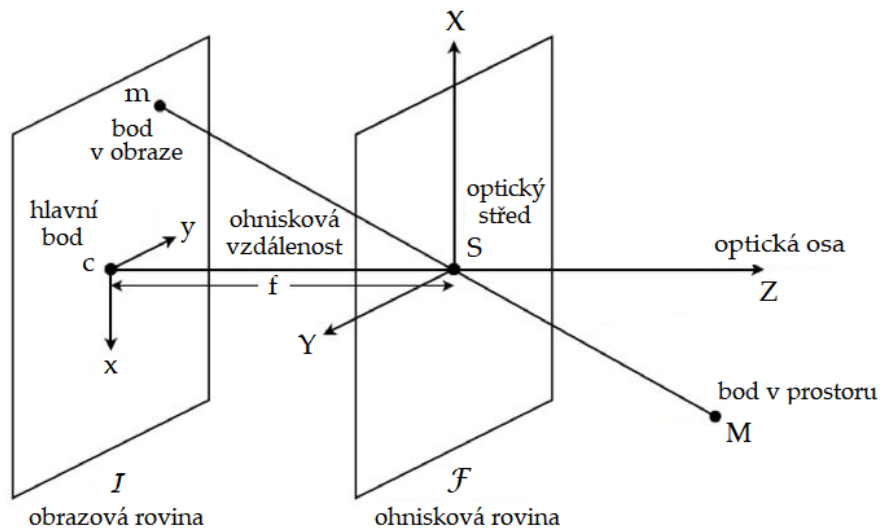
Použité kamery jsou značky Manta od výrobce Allied Vision, konkrétně se jedná o typ „Manta G-031“ [19]. Tyto kamery mají rozlišení 656×492 px, s rozměry pixelu $5,6 \times 5,6 \mu\text{m}$, 8-bitovou hloubkou a černobílým snímáním. Nákres kamery můžeme vidět na obrázku níže:

3.1. KAMEROVÝ SYSTÉM



Obrázek 3.1: Manta G-031, převzato z [19] a upraveno

Abychom mohli s kamerovým systémem matematicky pracovat, každou z kamer popíšeme jako tzv. *dírkovou kameru* (angl. *pinhole camera*), jejíž model vypadá následovně:



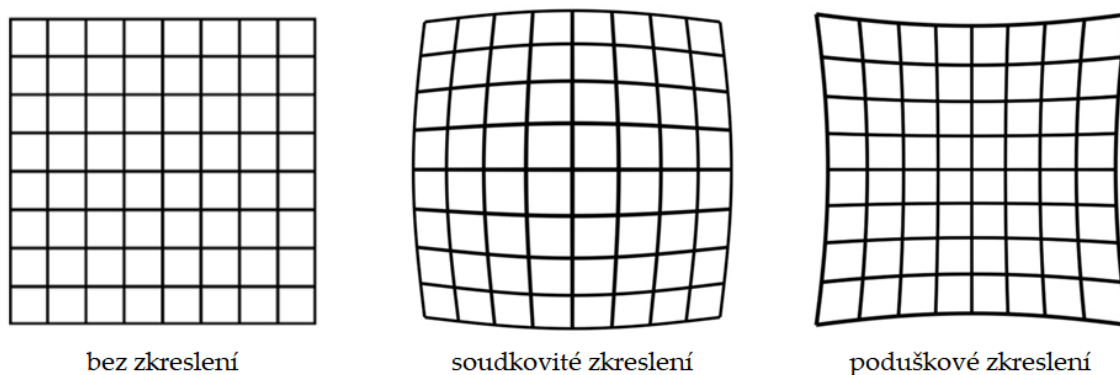
Obrázek 3.2: Model dírkové kamery, převzato z [10] a upraveno

Jedná se o kameru, u níž se předpokládá, že *apertura* (otvor, kterým světlo proniká do kamery) je velice malá, teoreticky nekonečně malá, a tedy bodová. Kamera v takovém případě pomocí středového promítání se středem v bodě *S* (*optický střed kamery*) promítá

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

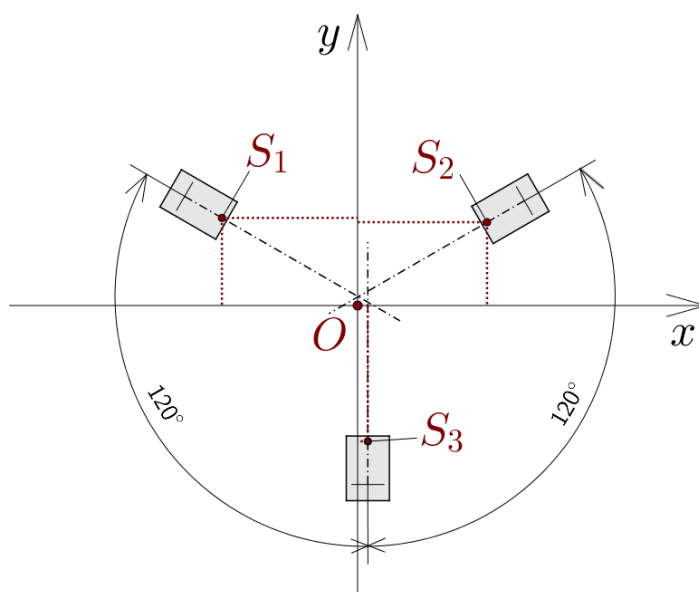
body ze snímaného trojrozměrného prostoru do obrazové roviny, která představuje snímač kamery. Přímka kolmá na obrazovou rovinu procházející optickým středem S se nazývá *optická osa* (též *hlavní osa*, *principal axis*) a bod c , ve kterém protíná obrazovou rovinu, je tzv. *hlavní bod* (*principal point*), někdy nazývaný *optický střed obrazu*. Důležitým parametrem dírkové kamery je také *ohnisková vzdálenost* f , tedy vzdálenost mezi optickým středem a hlavním bodem.

Dalšími charakteristikami kamery jsou *rozměry pixelu* - rozměr v x -ovém směru s_x a rozměr v y -ovém směru s_y (pixely obecně nemusí být čtvercové). V neposlední řadě zmiňme, že čočka kamery může vlivem nedokonalé konstrukce způsobit tzv. *radiální distorzi*, tedy zkreslení, při kterém kamera není schopna zobrazovat rovné linie rovně:



Obrázek 3.3: Hlavní druhy radiální distorze, převzato z [18] a upraveno

Aby bylo možné popsat prostorové rozložení kamer kamerového systému, je nutné zavést kartézský souřadný systém, tedy nějakým způsobem určit jeho počátek a stanovit souřadné osy. V tomto systému pak budeme schopni hledat polohu kamer popsanou souřadnicemi jejich optických středů:



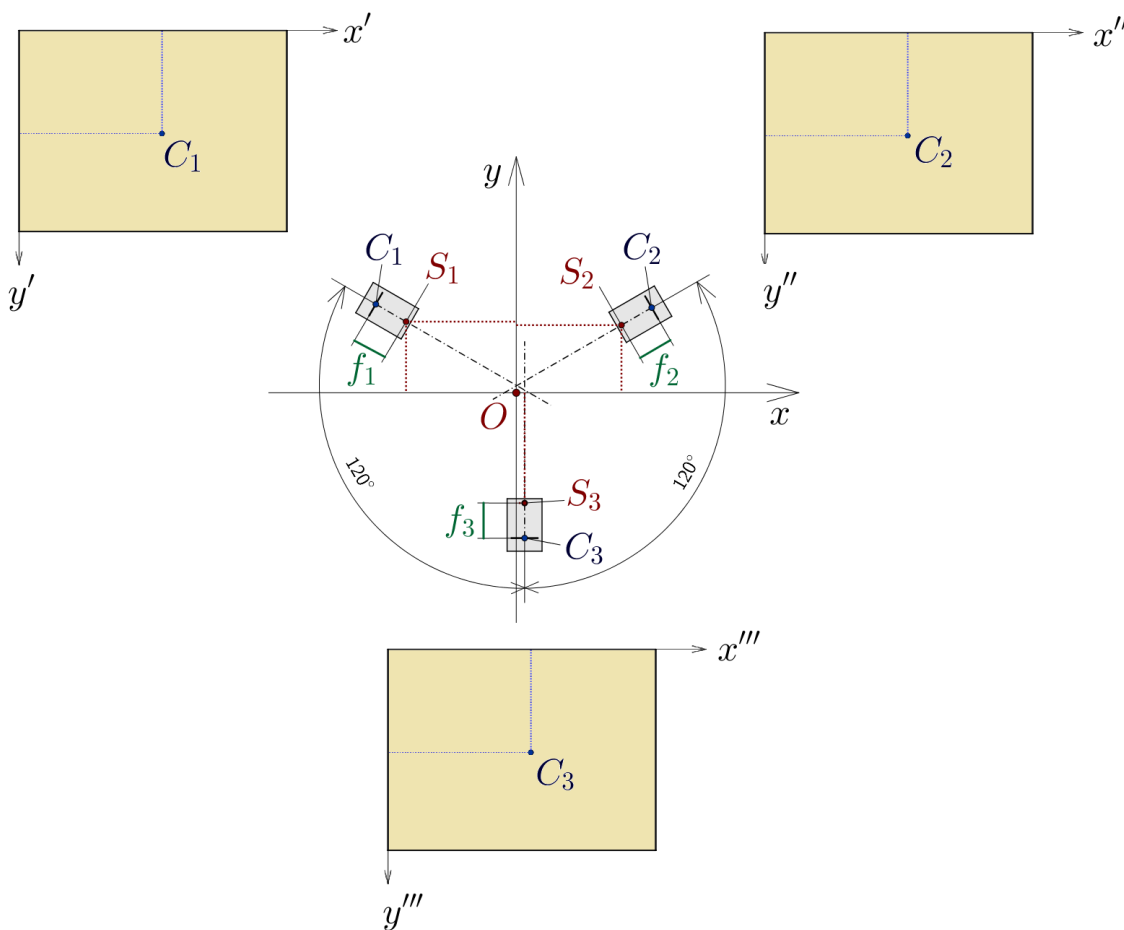
Obrázek 3.4: Kartézský souřadný systém

3.2. PŘÍMÁ METODA KALIBRACE

Protože rozměry pixelu daných kamer známe a vliv radiální distorze se ukázal být zanedbatelný, pro celkový popis kamerového systému tedy stačí určit následující neznámé parametry:

- hlavní body C_i v i -tém obraze
- ohniskové vzdálenosti f_i
- kartézskou souřadnou soustavu a optické středy S_i

kde $i = 1, 2, 3$.



Obrázek 3.5: Hledané parametry kamerového systému

Možných způsobů kalibrace kamer je mnoho, dále vypíchneme dva, které byly vyzkoušeny při tvorbě této práce.

3.2. Přímá metoda kalibrace

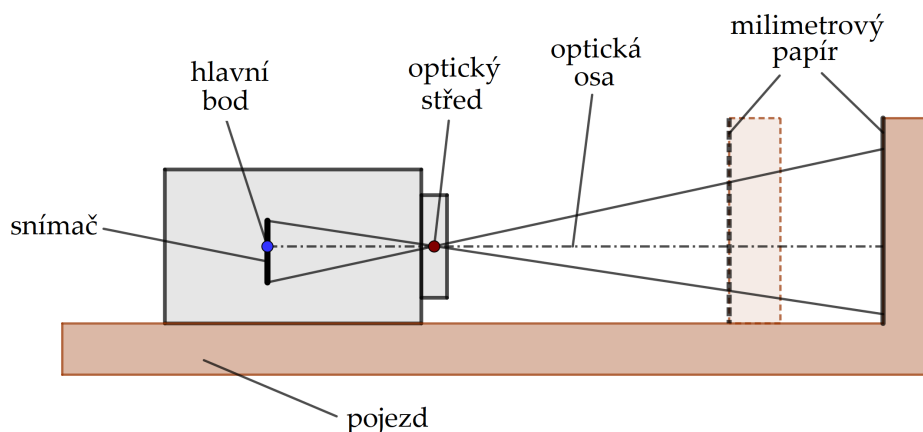
Tento způsob nalezení neznámých parametrů kamery vychází z myšlenky tzv. *kalibračních značek*, tedy nějakých objektů v obraze pořízeném příslušnou kamerou, jejichž skutečnou velikost a/nebo tvar známe. V našem případě jejich roli sehrají prostý milimetrový papír a nylonová kytarová struna o průměru 1,02 mm, jejíž průřez budeme považovat za dokonale kruhový.

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

Poznámka. V praxi tato metoda kalibrace dávala výsledky vykazující velkou variabilitu v závislosti na použití rozdílných snímků - hodnoty zjištěné s její pomocí tedy nelze považovat za relevantní. Příčinou byly pravděpodobně z největší části mechanické nepřesnosti a odchylky, které vznikly při porizování snímků milimetrového papíru z různých vzdáleností (viz dále). Přesto tento způsob kalibrace popíšeme v několika krocích:

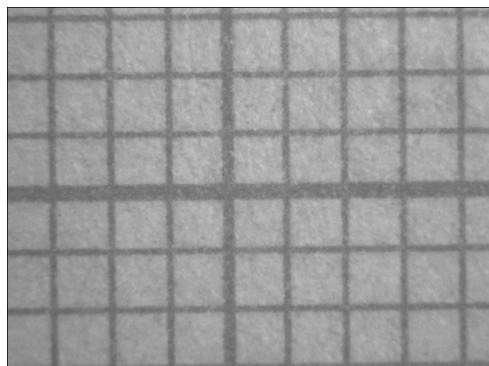
Hlavní bod obrazu

Před nalezením hlavního bodu v obraze začneme tím, že pořídíme několik snímků milimetrového papíru z různých vzdáleností. K tomu využijeme pojezd, na jehož konec přilepíme milimetrový papír tak, aby ho kamera mohla snímat:

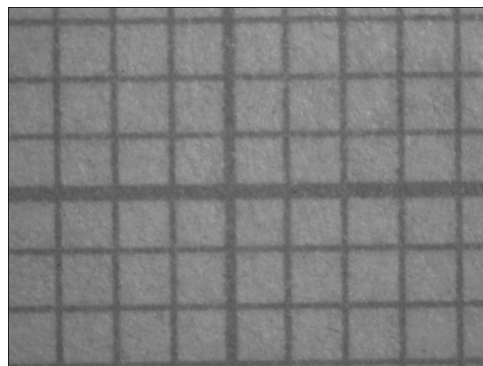


Obrázek 3.6: Schéma kamery na mechanickém pojezdu

Dále vybereme libovolnou dvojici snímků pořízených z různých vzdáleností (nejlépe snímky, které jsou dostatečně ostré) :



(a) Bližší objekt

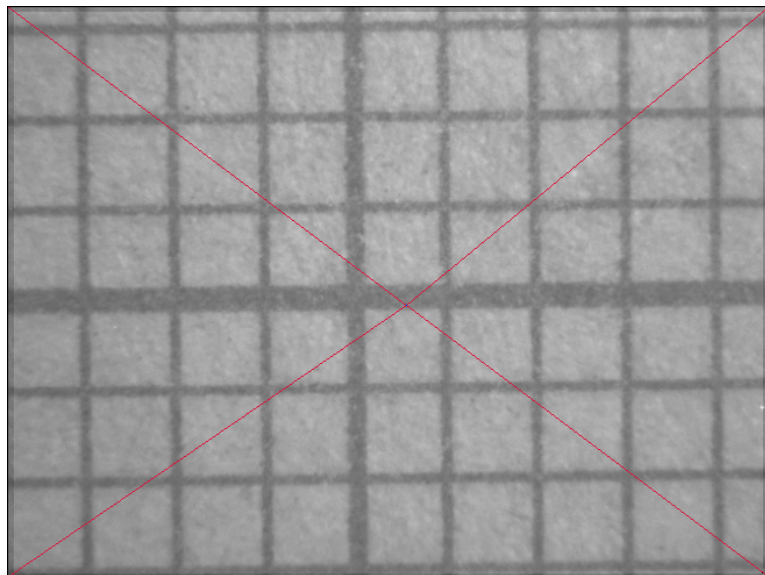


(b) Vzdálenější objekt

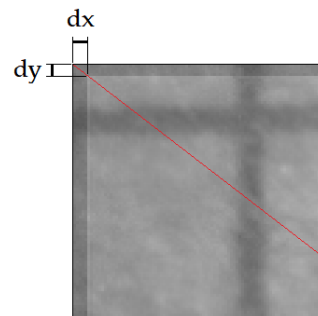
Nyní využijeme toho, že z čím větší vzdálenosti objekt snímáme, tím menší se jeví na snímku a se zvětšující se vzdáleností od kamery se vlastně opticky „smršťuje“ do jednoho bodu v obraze - tímto bodem je právě hlavní bod.

Pokud vhodnou interpolací zmenšíme „bližší snímek“ tak, aby se dal opticky sesadit na „snímek vzdálenější“, je hlavní bod obrazu možné najít jako průsečík přímek spojujících rohy vzdálenějšího snímku s příslušnými rohy zmenšeného bližšího snímku po sesazení, jak můžeme vidět na obrázcích níže:

3.2. PŘÍMÁ METODA KALIBRACE



Obrázek 3.8: Sesazení snímků, hlavní bod



Obrázek 3.9: Detail na levý horní roh, vzájemné posunutí (dx, dy) v obraze

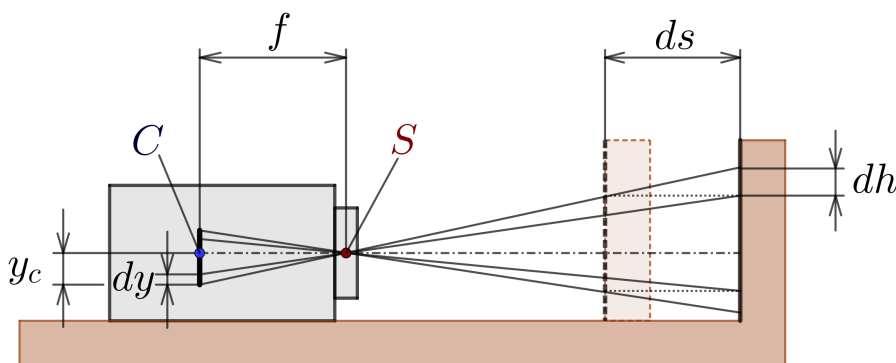
Známe-li koeficient zmenšení k bližšího snímku a vzájemné posunutí po sesazení snímků (dx, dy) , pak po úpravách dostaneme následující vztah pro výpočet polohy hlavního bodu $C = [x_c, y_c]$:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{dx}{1-k} [px], \\ y_c &= \frac{dy}{1-k} [py]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Poznámka. K výpočtu koeficientu zmenšení a vzájemného posunutí se používají metody založené na Fourierově transformaci. Aby byla vypočtená poloha hlavního bodu věrohodná, je ovšem nutné posunutí (dx, dy) určit na subpixelové úrovni (těmito metodami a subpixelovou registrací obrazu se zabývá například [6]).

Ohnisková vzdálenost

K určení ohniskové vzdálenosti kamery můžeme využít sesazení popsaného na obrázku 3.8 - tím, že zmenšený bližší snímek sesadíme na snímek vzdálenější, tak de facto kolmo promítneme výšek milimetrového papíru z bližší polohy do vzdálenější polohy:



Obrázek 3.10: Virtuální sesazení bližšího a vzdálenějšího snímku

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

Polohu hlavního bodu $C = [x_c, y_c]$ a vzájemné posunutí v obraze (dx, dy) jsme už zjistili, stejně tak považujeme za známou vzdálenost ds , kterou jsme naměřili během pořizování snímků. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá, že ohnisková vzdálenost f se dá vyjádřit jako

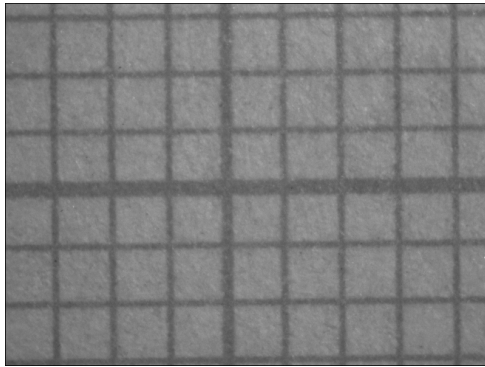
$$f = \frac{ds \cdot y_c \cdot s_y}{dh} [mm],$$

respektive

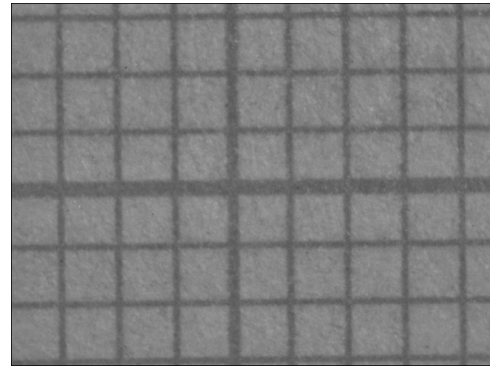
$$f = \frac{ds \cdot x_c \cdot s_x}{dw} [mm],$$

kde s_y a s_x jsou rozměry pixelu v mm a dh a dw jsou skutečné rozměry vzájemného posunutí, kterým v obraze odpovídají dy a dx .

K určení dh a dw využijeme toho, že středy sousedních čar na milimetrovém papíře jsou od sebe vždy vzdálené jeden mm. Analyzujeme tedy vzdálenější snímek tak, že nejprve provedeme jasovou korekci (milimetrový papír nemusel být při snímání rovnoměrně osvětlený), potom na snímek použijeme horizontální filtr typu klouzavý průměr s periodou, která je přibližně rovna rozpětí čar milimetrového papíru v pixelech - tím opticky eliminujeme vertikální čáry. Tento snímek poté binarizujeme vhodným prahováním.



(a) Vzdálenější snímek



(b) Korekce osvětlení



(c) Eliminace vertikálních čar



(d) Vyprahovaný snímek

Černými čarami ve vyprahovaném snímku výše proložíme metodou nejmenších čtverců přímky, a nevhodné přímky (v našem případě třeba tu proloženou poslední černou čarou) vyloučíme. Označíme-li m velikost jednoho milimetru na snímku v pixelech (máme čtvercový pixel, uvažujeme tedy stejnou velikost $s_y = s_x$ v obou směrech), můžeme ji spočítat

3.2. PŘÍMÁ METODA KALIBRACE

jako vzdálenost vhodných krajních přímek v pixelech podělenou počtem vhodných přímek bez jedné. Se znalostí velikosti m dostáváme

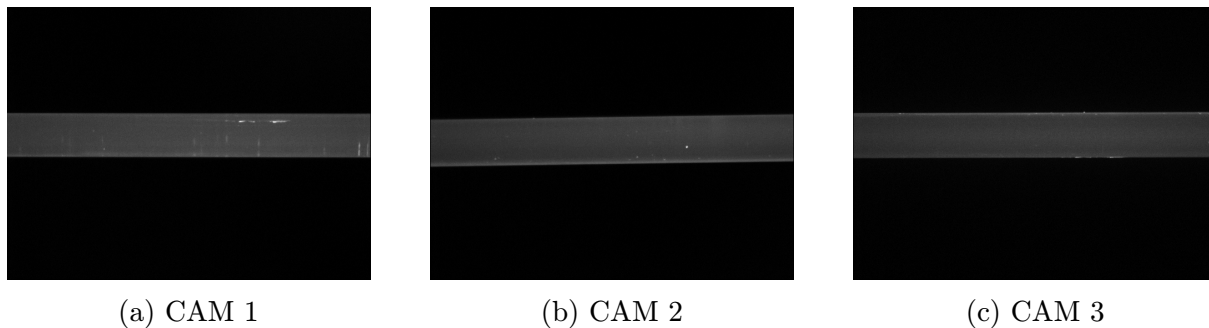
$$f = \frac{ds \cdot y_c \cdot s_y}{dh} = \frac{ds \cdot y_c \cdot s_y}{\frac{dy}{m}} = \frac{ds \cdot y_c \cdot s_y \cdot m}{dy} [mm], \quad (3.2)$$

respektive

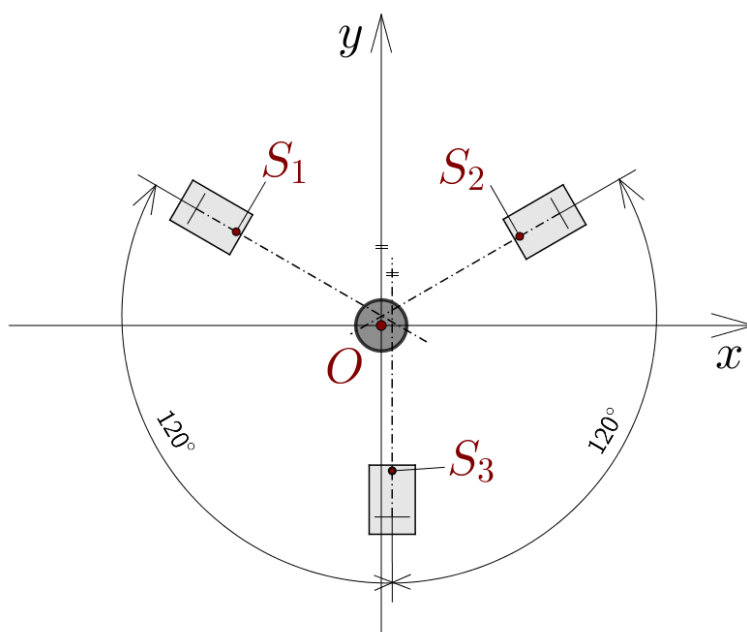
$$f = \frac{ds \cdot x_c \cdot s_x}{dw} = \frac{ds \cdot x_c \cdot s_x}{\frac{dx}{m}} = \frac{ds \cdot x_c \cdot s_x \cdot m}{dx} [mm]. \quad (3.3)$$

Souřadná soustava a optický střed

Souřadnou soustavu a optické středy kamer určíme pomocí tzv. *referenčního etalonu*, kterým v našem případě bude zmíněná struna kruhového průřezu se známým průměrem (v našem případě 1,020 mm). Strunu umístíme tak, aby byly její hrany na snímcích kamer přibližně rovnoběžné s šířkou obrazu:



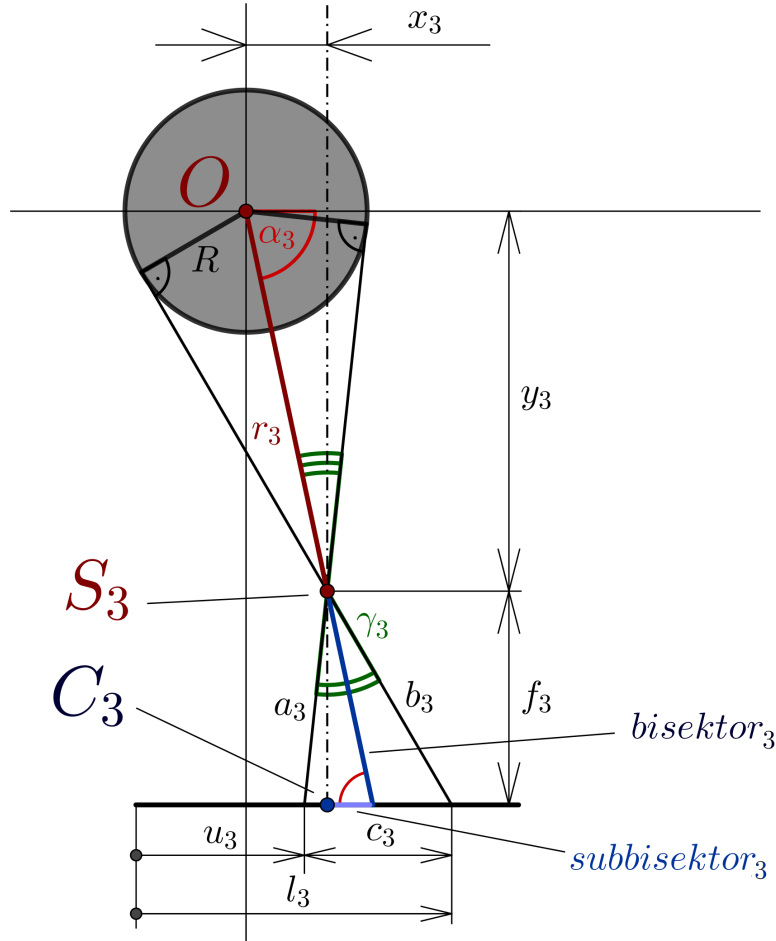
Souřadnou soustavu potom zavedeme tak, že její počátek O ztotožníme s geometrickým středem průřezu struny, osa y bude rovnoběžná s optickou osou kamery 3 a osa x na ni bude kolmá:



Obrázek 3.13: Kartézský souřadný systém se strunou

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

Při určení souřadnic optických středů kamer v tomto souřadném systému budeme vycházet z výpočtu pro kameru 3, jejíž optická osa je rovnoběžná s osou y .



Obrázek 3.14: Hledání optického středu - detail
(struna pro názornost zvětšena a přiblížena ke kameře)

Pokud jako r_3 označíme rameno mezi optickým středem S_3 a středem průřezu struny a jako α_3 úhel mezi ramenem a osou x , můžeme vidět, že souřadnice optického středu odpovídají

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm r_3 \cos \alpha_3 \\ -r_3 \sin \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

kde x -ová souřadnice může být kladná, nebo záporná podle polohy optické osy kamery vůči počátku souřadné soustavy. Abychom spočetli velikost ramene, využijeme faktu, že přímka OS_3 dělí úhel γ_3 mezi optickými tečnami na poloviny, platí tedy

$$r_3 = \frac{R}{\sin \frac{\gamma_3}{2}}, \quad (3.5)$$

kde R je poloměr struny. Dokážeme-li určit hrany referenční struny na snímku ¹, můžeme pomocí jejich y -ových poloh v obraze u_3 a l_3 , ohniskové vzdálenosti f a y -ové souřadnici

¹Detekcí hran se podrobněji zabývá podkapitola 4.2

3.3. OPTIMALIZAČNÍ METODA KALIBRACE

hlavního bodu C_3 y_{c_3} spočítat a zavést strany a_3, b_3, c_3 spodního trojúhelníka z obr. 3.14. Podle kosinové věty a vztahu pro sinus polovičního úhlu platí

$$\cos \gamma_3 = \frac{a_3^2 + b_3^2 - c_3^2}{2a_3b_3},$$

$$\sin \frac{\gamma_3}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma_3}{2}},$$

což můžeme dosadit do vztahu 3.5. Podobně vypočítáme délky *bisektoru* a *subbisektoru*, díky kterým podle podobnosti trojúhelníků dostáváme

$$\sin \alpha_3 = \frac{f_3}{bisektor_3},$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{f_3}{subbisektor_3},$$

které dosadíme do vzorce 3.4.

Kamery jsou rozmístěny po 120° , pro kameru 1 a 2 tedy můžeme provést analogický výpočet, jen musíme výsledné body ještě otočit o příslušný úhel, tudíž

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^* \\ y_2^* \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

pro kameru 2 a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

pro kameru 1, kde x_1^*, y_1^* a x_2^*, y_2^* jsou souřadnice vypočtené analogicky způsobem pro kameru 3.

Poznámka. Model určení souřadné soustavy a optického středu popsany v tomto oddíle se dá využít i tak, že volbou vlastních hlavních bodů a ohniskových vzdáleností souřadnou soustavu a optické středy pomocí referenčního etalonu jednoduše dopočítáme.

3.3. Optimalizační metoda kalibrace

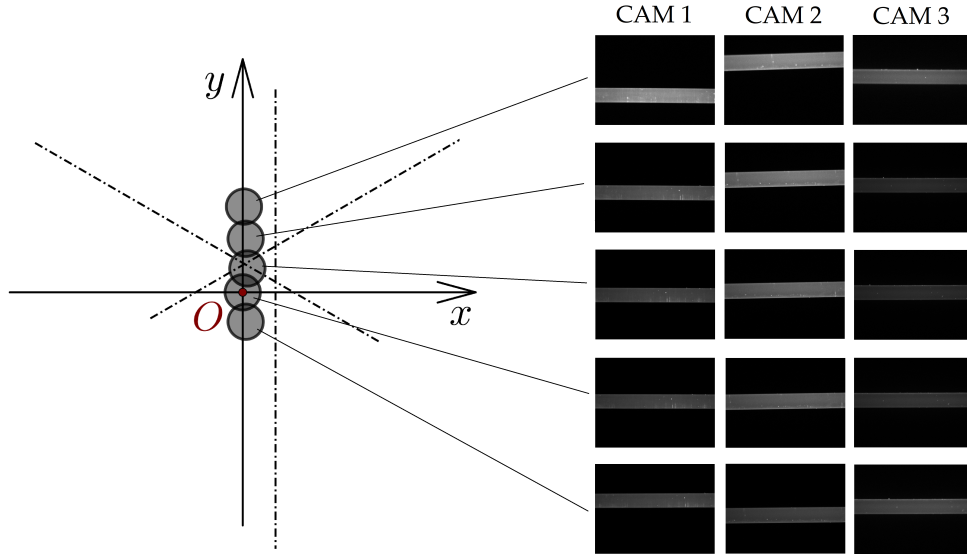
Tento způsob kalibrace kompenzuje některé nedostatky předchozí metody - není zdaleka tak pracný ani časově náročný a potřebujeme k němu jen několik snímků struny (nebo jiného kruhového etalonu) v různých polohách.

Na začátku vyjdeme z představy, že pokud pořídíme na trojici kamer snímky kruhového etalonu o známém průměru v různých polohách a určíme podle nich ovalitu, měly by aproximační elipsy etalonu vycházet v každé poloze (tedy pro každou trojici odpovídajících si snímků) jako dokonalé kružnice². V praxi této dokonalosti samozřejmě nikdy nedosáhneme, ale můžeme se jí přiblížit. Za předpokladu, že jsme schopni určit hrany etalonu v obraze dostatečně přesně, měl by stav, kdy vyjdou aproximační elipsy jako kružnice pro každou z testovaných trojic snímků etalonu, nastat právě když počítáme se skutečnými parametry kamerového systému. Naším cílem tedy bude najít hlavní body,

²O tom, jak určit ovalitu ze snímků, bude pojednávat následující kapitola 4

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

ohniskové vzdálenosti a optické středy kamer tak, aby odhad průřezů etalonu v různých polohách vycházel co nejkulatěji.



Obrázek 3.15: Etalon v různých polohách - detail

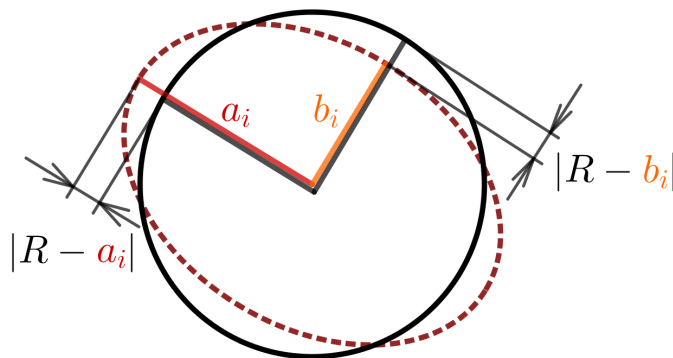
Hledání parametrů můžeme formalizovat tak, že se jejich správnou volbou snažíme minimalizovat tzv. *účelovou funkci* g , která je na těchto parametrech závislá a která vyjadřuje odchylku od ideální kruhovitosti. Můžeme ji definovat např. jako

$$g = \sum_{i=1}^n (|R - a_i| + |R - b_i|) \quad (3.8)$$

nebo

$$g = \sum_{i=1}^n ((R - a_i)^2 + (R - b_i)^2), \quad (3.9)$$

kde n je počet testovaných poloh etalonu, R je poloměr etalonu a a_i , resp. b_i , je délka hlavní, resp. vedlejší poloosy i -té aproximační elipsy.



Obrázek 3.16: Odchylky od kruhovitosti

Při definování účelové funkce ale můžeme být náročnější a místo minimalizace odchylek aproximačních elips od kruhovitosti můžeme sledovat odchylky samotných pomocných

3.3. OPTIMALIZAČNÍ METODA KALIBRACE

elips, z nichž je aproximační elipsa odvozená. Tím vznikají další dvě možné definice účelové funkce, a to

$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 (|R - a_{ij}| + |R - b_{ij}|) \quad (3.10)$$

a

$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 ((R - a_{ij})^2 + (R - b_{ij})^2), \quad (3.11)$$

kde a_{ij} , resp. b_{ij} , je délka hlavní, respektive vedlejší poloosy j -té pomocné elipsy etalonu v i -té poloze.

Hledání parametrů kamerového systému nám částečně usnadní fakt, že i když hlavní body obecně neleží ve středu obrazu, experimentálně bylo prokázáno, že pokud zvolíme hlavní bod z okolí středu obrazu, má to na změnu ovality zanedbatelný vliv. Z tohoto důvodu budeme pro náš případ uvažovat u všech kamer stejný hlavní bod - geometrický střed obrazu - tedy $C_i = [327, 5; 245, 5] \text{ px}$ pro $i = 1, 2, 3$.

Při hledání kartézské souřadné soustavy a optických středů kamer vyjdeme z modelu popsaném v předchozí podkapitole na obr. 3.14. Můžeme vidět, že poloha optického středu S_i každé kamery se dá vypočítat pomocí poloměru etalonu R , polohy hlavního bodu C_i a ohniskové vzdálenosti f_i . Protože poloměr etalonu i polohy hlavních bodů kamer známe, můžeme za jediné neznámé parametry v úloze považovat ohniskové vzdálenosti f_i . Tím se problém zjednoduší na úlohu typu

$$\min_{\mathbf{f} > \mathbf{0}} g(\mathbf{f}), \quad (3.12)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Zjednodušeně řečeno, budeme zkoušet různé ohniskové vzdálenosti kamer tak dlouho, dokud nebude celková odchylka vypočítané ovality od dokonalé kruhovitosti co nejmenší. K tomu můžeme využít různé optimalizační metody, v práci se však omezíme pouze na jednu, a to *metodu gradientního spádu*.

Metoda gradientního spádu

Více o gradientním spádu³ pojednává např. [4]. Tato metoda se snaží minimalizovat funkci g za pomoci jejího gradientu ∇g , nebo přesněji záporného gradientu $-\nabla g$. Protože gradient funkce v bodě reprezentuje směr nejstrmějšího růstu, záporný gradient bude představovat směr nejstrmějšího spádu, a tak dobře poslouží při nalezení minima funkce g . Označíme-li jako $\mathbf{f}^{(0)} = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_3^{(0)})$ trojici počátečních ohniskových vzdáleností (*počáteční bod* v trojrozměrném parametrickém prostoru), pak tento bod „aktualizujeme“ pomocí záporného gradientu na

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}^{(0)} - \kappa \nabla g(\mathbf{f}^{(0)}),$$

kde $\kappa > 0$. Toto pravidlo pak můžeme zobecnit na předpis pro $k + 1$. bod

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \kappa \nabla g(\mathbf{f}^{(k)}). \quad (3.13)$$

Protože explicitní vyjádření ∇g by bylo komplikované, budeme k jeho nalezení přistupovat numericky. Je-li

$$g(\mathbf{f}^{(k)}) = g(f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_3^{(k)})$$

³angl. *gradient descent*, také někdy *steepest descent*

3. KALIBRACE KAMEROVÉHO SYSTÉMU

hodnota účelová funkce v k -tém bodě, pak složky gradientu

$$\nabla g(\mathbf{f}^{(k)}) = \left(\frac{\partial g}{\partial f_1}(\mathbf{f}^{(k)}), \frac{\partial g}{\partial f_2}(\mathbf{f}^{(k)}), \frac{\partial g}{\partial f_3}(\mathbf{f}^{(k)}) \right)$$

můžeme aproximovat pomocí *1. centrální difference* následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial f_1}(\mathbf{f}^{(k)}) &\approx \frac{g(f_1^{(k)} + h, f_2^{(k)}, f_3^{(k)}) - g(f_1^{(k)} - h, f_2^{(k)}, f_3^{(k)})}{2h}, \\ \frac{\partial g}{\partial f_2}(\mathbf{f}^{(k)}) &\approx \frac{g(f_1^{(k)}, f_2^{(k)} + h, f_3^{(k)}) - g(f_1^{(k)}, f_2^{(k)} - h, f_3^{(k)})}{2h}, \\ \frac{\partial g}{\partial f_3}(\mathbf{f}^{(k)}) &\approx \frac{g(f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_3^{(k)} + h) - g(f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_3^{(k)} - h)}{2h}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

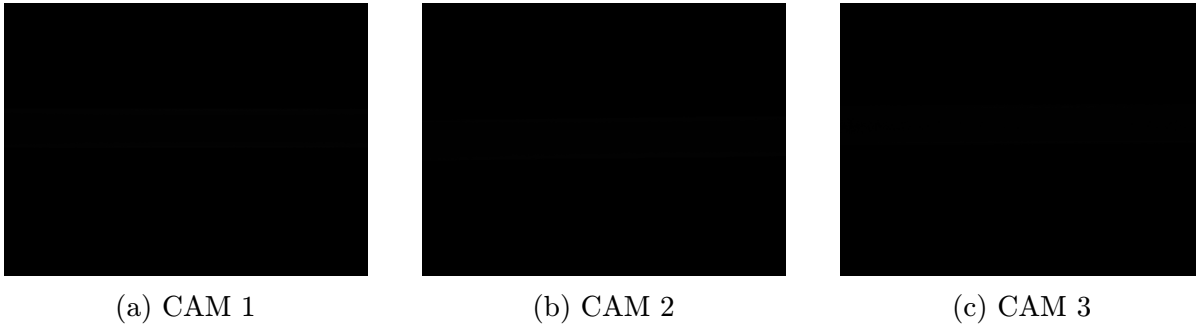
kde $h > 0$ je krok. Metoda se dá nyní shrnout tak, že vyjdeme z počátečního bodu $\mathbf{f}^{(0)}$ a opakujeme jeho aktualizaci pomocí předpisu (3.13) tak dlouho, dokud není splněna námi stanovená podmínka (např. že účelová funkce dosáhla určité přesnosti, velikost gradientu došla pod určitou mez nebo výpočet trvá déle než maximální požadovanou dobu). Výsledný bod, ve kterém se výpočet zastaví, je hledaným minimem.

4. Analýza snímků extrudovaného vlákna

V této kapitole zužitkujeme poznatky z kapitol předchozích a ukážeme si, jakým způsobem analyzovat snímky extrudovaného vlákna, abychom byli schopni z nich určit jeho ovalitu a průměr. Teoretický podklad tato kapitola čerpá z [14] a [5].

4.1. Preprocessing

Snímky vlákna pořízené kamerami jsou na začátku velice tmavé a opticky nečitelné, jako by na nich ani žádné vlákno nebylo:



Obrázek 4.1: Snímky vlákna v surovém stavu

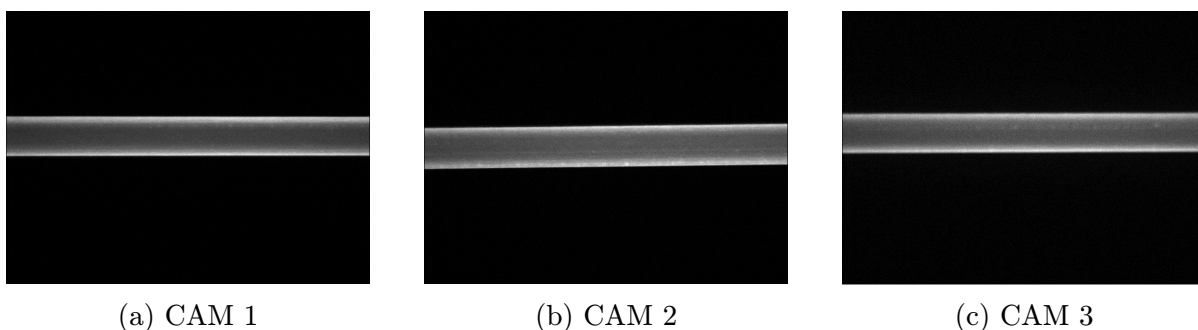
Pro jejich další analýzu je tedy vhodné je trochu prosvětlit. K tomu využijeme tzv. *jasovou normalizaci* - označíme-li a_{ij} hodnotu pixelu obrazu A v i -tém sloupci a j -tém řádku, pak nový obraz B s hodnotami pixelů b_{ij} získáme jasovou normalizací jako

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{round} \left(a_{ij} \cdot \frac{2^d - 1}{\max(A)} \right) & \text{pokud } \max(A) \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } \max(A) = 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

kde $\max(A)$ je nejvyšší hodnota pixelu v obraze A , d je bitová hloubka a round značí zaokrouhlení. V našem případě pracujeme s 8-bitovým obrazem, dostáváme tedy

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{round} \left(a_{ij} \cdot \frac{255}{\max(A)} \right) & \text{pokud } \max(A) \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } \max(A) = 0 \end{cases}. \quad (4.2)$$

Díky jasové normalizaci jsme horní práh původního rozsahu jasu zvýšili na hodnotu 255 a nechali tím vyniknout strukturu vlákna.

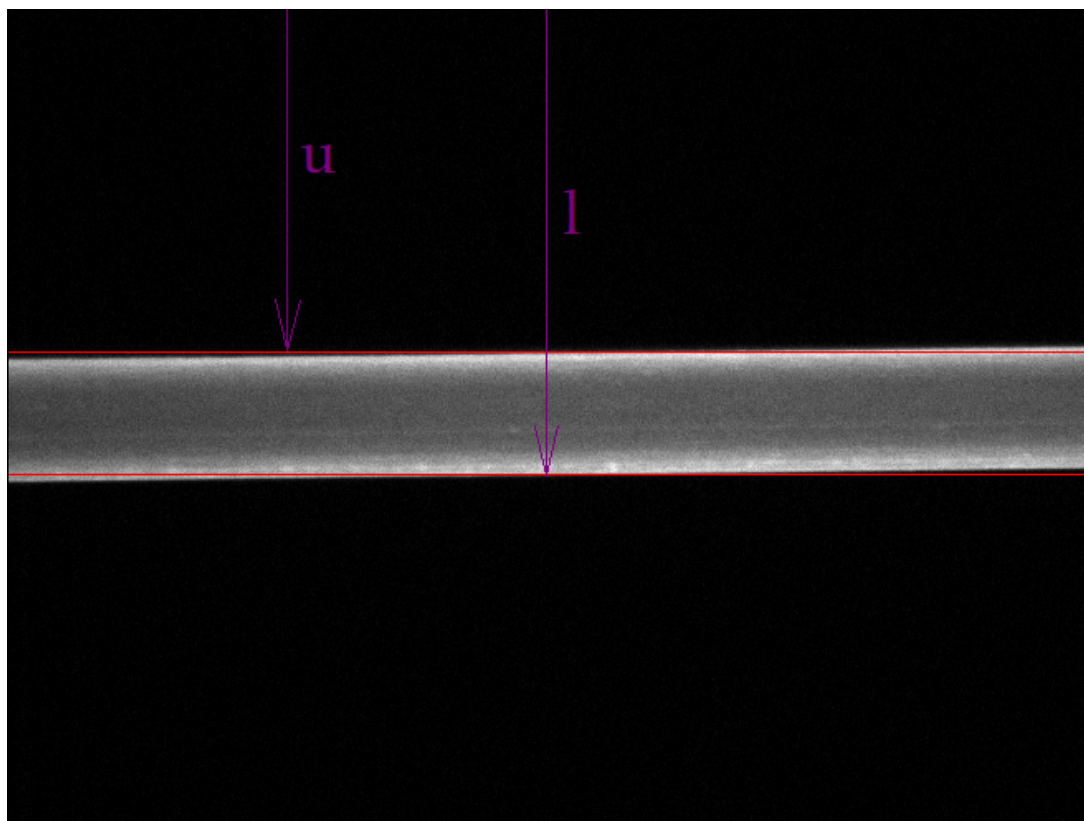


Obrázek 4.2: Snímky vlákna po jasové normalizaci

4.2. Detekce hran

Nyní přistoupíme k samotné analýze předupravených snímků. Pro nalezení vyjádření optických tečen zmíněných v kapitole 1 (konkrétně v 1.2.4) je klíčové s dostatečnou přesností určit horní a spodní hranu vlákna v obraze.

Úmluva. I když hrany vlákna nejsou vždy přesně rovnoběžné s šířkou obrazu, budeme vyskytující se drobné uchýlení vlákna od rovnoběžnosti zanedbávat. K vláknům zachyceným na snímcích tedy budeme přistupovat tak, jako by jejich hrany s šířkou obrazu rovnoběžné byly. Každé vlákno budeme tudíž reprezentovat pomocí *průměrných hran* (horní a spodní) a jejich y -ových pozic u a l v obraze:

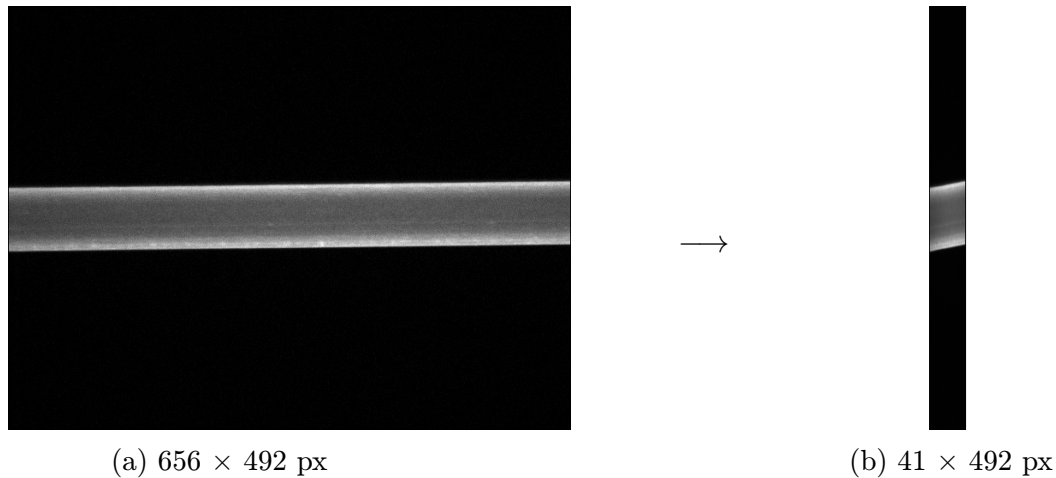


Obrázek 4.3: Průměrné hrany vlákna v obraze

K nalezení průměrných hran využijeme následující postup:

4.2. DETEKCE HRAN

- 1) Protože snímky mohou být obecně zatíženy šumem, potlačíme ho zúžením obrazu. To provedeme tak, že vertikálně rozdělíme obraz na 41 úseků vždy po 16 sloupcích a z každého úseku vytvoříme zprůměrováním hodnot pixelů jeden sloupec. Dostaneme tedy smyšlený *zúžený obraz* o velikosti 41×492 px.

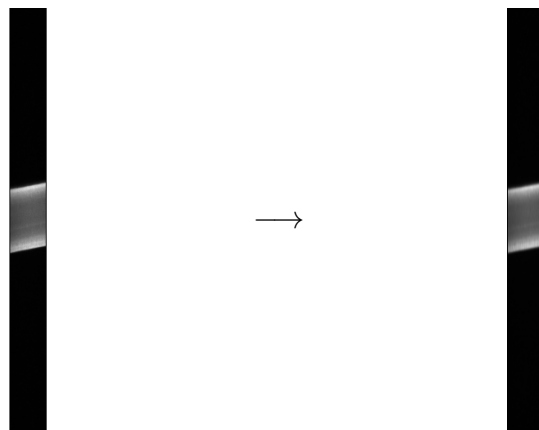


Obrázek 4.4: Zúžení obrazu

- 2) Pro jistotu můžeme každý ze sloupců zúženého obrazu vyhladit pomocí konvoluce s jednorozměrným jádrem

$$[0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad 0,1]^T$$

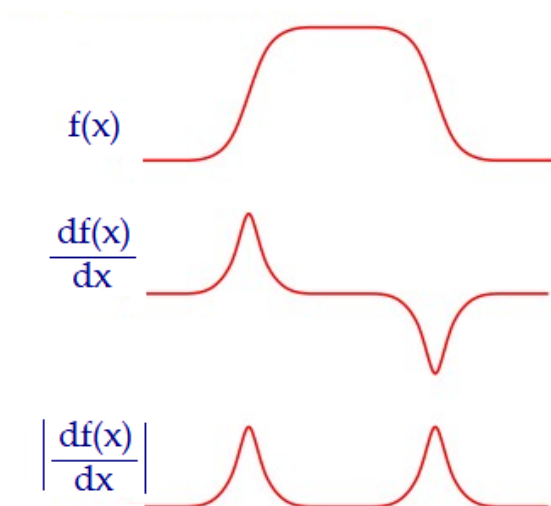
čímž potlačíme potenciální náhlé změny v intenzitě jasu mimo hrany při současném zachování střední polohy hran.



Obrázek 4.5: Vyhlazení zúženého obrazu

- 3) V dalším kroku určíme hrany vlákna ve zúženém obraze. Protože hrany v obraze představují prudkou změnu hodnot pixelů, můžeme k jejich určení s výhodou využít první derivaci, respektive její diskrétní podobu - první diferenci.

4. ANALÝZA SNÍMKŮ EXTRUDOVANÉHO VLÁKNA

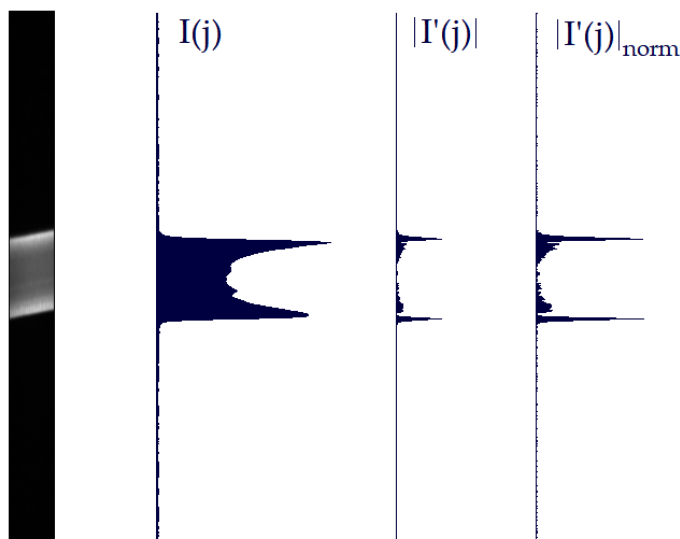


Obrázek 4.6: Derivace funkce ¹

Můžeme vytušit, že funkce jasu má podél každého sloupce zúženého obrazu podobný průběh jako funkce $f(x)$ z obr. 4.6 výše. Pokud tedy v každém sloupci určíme první diferenci ve vertikálním směru a její absolutní hodnotu, přejde úloha hledání hran na problém nalezení pozic dvou lokálních maxim v průběhu difference. Pro výpočet můžeme zvolit *první dopřednou diferenci*

$$I'(j) \approx I(j+1) - I(j), \quad (4.3)$$

kde $I(j)$ je hodnota (jas) j -tého pixelu v daném sloupci. Aby lokální maxima v průběhu první difference lépe vynikla, můžeme ještě její hodnoty normovat na interval $\langle 0, 100 \rangle$.

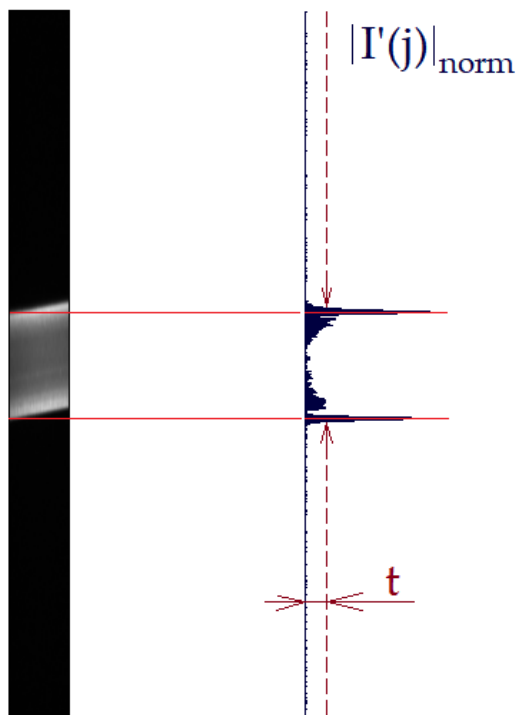


Obrázek 4.7: Jas, jeho absolutní difference a normovaná absolutní difference podél nultého sloupce zúženého obrazu

¹Převzato z [15] a upraveno

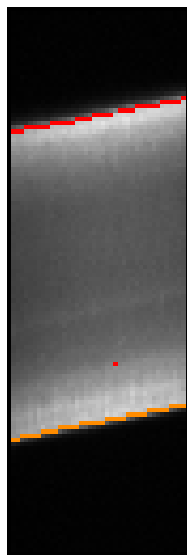
4.2. DETEKCE HRAN

S pomocí normované absolutní difference jasu můžeme nyní snadno zjistit pozice hran ve sloupci. Abychom určili pozici horní hrany, stačí průběh $|I'(j)|_{norm}$ projít shora dolů, zastavit se u první hodnoty, která bude větší než námi stanovený práh t (např. 10) a dále procházet hodnoty, dokud budou stoupat. Pozice těsně před klesáním bude místem hledaného lokálního maxima. Při hledání pozice dolní hrany bude postup analogický, akorát zdola nahoru.



Obrázek 4.8: Nalezení pozice hran v nultém sloupci zúženého obrazu

Tímto způsobem najdeme pozice hrany v každém sloupci zúženého obrazu.



Obrázek 4.9: Nalezené pozice hran zúženého obrazu - detail

4. ANALÝZA SNÍMKŮ EXTRUDOVANÉHO VLÁKNA

4) Označíme jako

$$P_u = \{u_0, \dots, u_{40}\},$$

$$P_l = \{l_0, \dots, l_{40}\},$$

soubor všech y -ových pozic horní (resp. spodní) hrany ve zúženém obraze. V těchto dvou souborech seřadíme vzestupně (či sestupně) jejich prvky, tedy

$$\{u_0, \dots, u_{40}\} \mapsto \{u_{(0)}, \dots, u_{(40)}\},$$

$$\{l_0, \dots, l_{40}\} \mapsto \{l_{(0)}, \dots, l_{(40)}\}$$

a takto seřazené soubory „ořežeme“ o spodní a horní kvantil:

$$\{u_{(0)}, \dots, u_{(40)}\} \mapsto \{u_{(10)}, \dots, u_{(30)}\},$$

$$\{l_{(0)}, \dots, l_{(40)}\} \mapsto \{l_{(10)}, \dots, l_{(30)}\}.$$

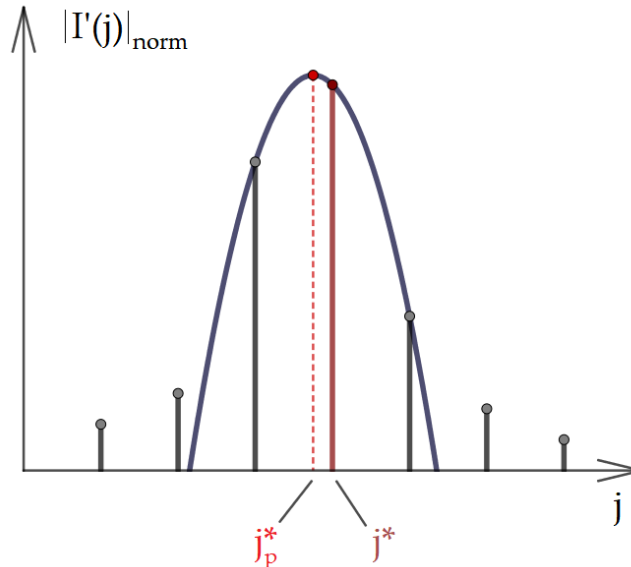
Tímto statistickým zpracováním jsme se zbavili potenciálních odlehlých bodů, jako třeba jednoho na obr. 4.9. Nakonec spočteme y -ové pozice průměrných hran jako aritmetický průměr upravených souborů, tudíž

$$u = \frac{u_{(10)} + \dots + u_{(30)}}{21},$$

$$l = \frac{l_{(10)} + \dots + l_{(30)}}{21}.$$
(4.4)

Tento postup provedeme u každého z trojice analyzovaných snímků.

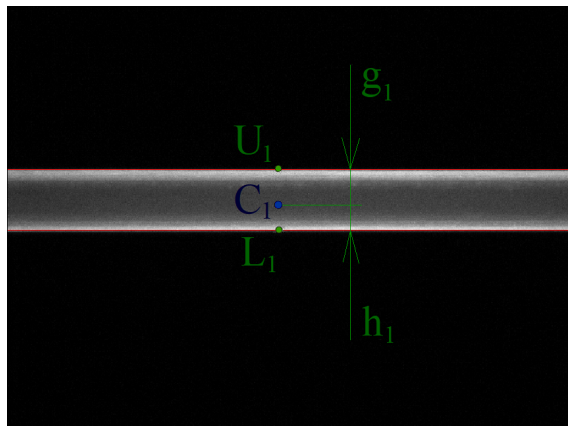
Poznámka. I když jsme v kroku 3) určovali v každém sloupci body hran na celočíselné pixelové úrovni, díky statistickému vyhodnocení v kroku 4) vyjdou hodnoty pozic průměrných hran obecně subpixelově, tedy neceločíselně. Případnou možností, jak hledat i body hran na subpixelové úrovni, by bylo proložení lokálních maxim v průběhu $|I'(j)|_{norm}$ a jeho okolních hodnot nějakou křivkou (např. parabolou nebo Gaussovou křivkou). Pozici, ve které by tato křivka nabývala svého vrcholu, bychom pak mohli prohlásit za hledaný bod hrany.



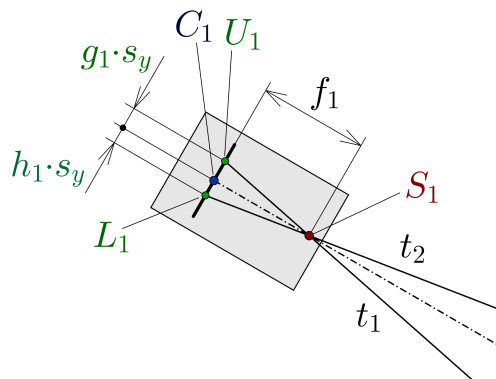
Obrázek 4.10: Příklad proložení parabolou

4.3. Nalezení optických tečen

Teď, když máme kamerový systém zkalibrovaný a určili jsme průměrné hrany na snímcích, můžeme určit i optické tečny. Jejich určení si ukážeme např. na kameře 1:



(a) Pohled na obraz



(b) Detail kamery

Obrázek 4.11: Nalezení optických tečen

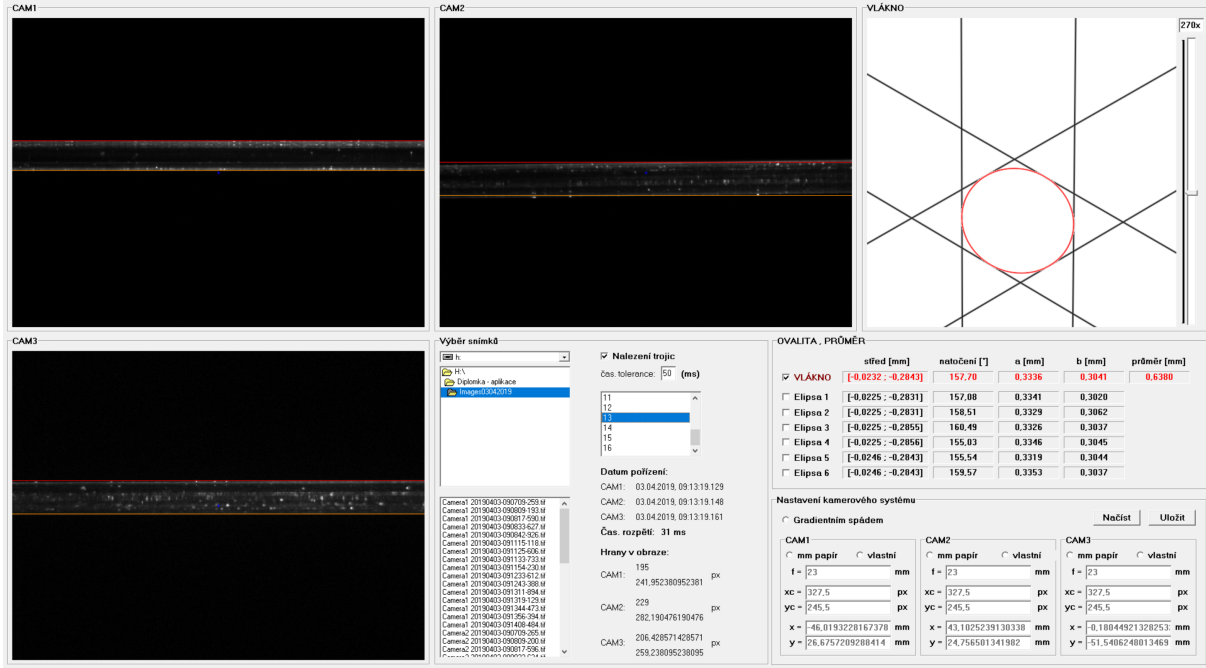
Je vidět, že polohu bodů U_1 a L_1 lze snadno určit z již známých veličin. Optické tečny t_1 , respektive t_2 , nejsou pak nic jiného než přímky $\overleftrightarrow{S_1U_1}$, respektive $\overleftrightarrow{S_1L_1}$. U dalších dvou kamer by byl postup analogický.

4.4. Využití ve výpočtu ovality

Díky tomu, že jsme nyní schopni získat ze snímků vlákna všech 6 optických tečen $\{t_1, \dots, t_6\}$, nic nám nebrání vypočítat ovalitu a průměr vlákna na snímcích buď přímo pomocí *ryze analytického přístupu* (podkapitola 2.3) nebo nepřímo *geometricky-analytickým přístupem* (podkapitola 2.2).

5. Víceúčelová aplikace

Jako součást práce byla ve vývojovém prostředí Delphi 7 v jazyce Object Pascal naprogramována aplikace sloužící k analýze snímků extrudovaného vlákna a kalibraci kamerového systému.



Obrázek 5.1: Hlavní okno aplikace

Nastavení parametrů kamerového systému je v ní možné provést až čtyřmi různými způsoby:

- přímou metodou kalibrace popsanou v 3.2
- pomocí metody gradientního spádu z 3.3
- volbou vlastních hodnot f_i, C_i a následným dopočítáním optických středů S_i pomocí etalonu podle modelu na obr. 3.14
- volbou vlastních hodnot parametrů

Výsledné nastavení parametrů je možné uložit do textového souboru s příponou .txt a stejně tak je možné nastavení hodnot z jiného textového souboru do aplikace načíst.

Jednou z funkcí aplikace je také roztržení snímků ve složce pořízených kamerami 1,2 a 3 tak, aby snímky pořízené v podobný okamžik utvořily trojice. Vybereme-li jednu z nalezených trojic, potom aplikace z příslušných snímků určí hrany vláken v obraze a spočítá jejich ovalitu a průměr. V případě zájmu je také možné v hlavním okně vykreslit aproximační a/nebo pomocné elipsy.

Protože byla vytvořena speciálně pro tuto analýzu, jako vstupy přijímá černobílé snímky s rozměry 656×492 px a příponou .tif (.tiff).

Více o aplikaci je možné se dozvědět v příloze, která kromě návodu na obsluhu obsahuje i kalibrační a testovací snímky.

6. Výsledky měření na reálných datech

Během tvorby této práce bylo analyzováno mnoho snímků extrudovaného vlákna za různých nastavení parametrů kamerového systému a stejně tak bylo vyzkoušeno, k jakým hodnotám parametrů kamerového systému dojdeme při použití rozličných kalibračních schémat. Tato kapitola se pokusí shrnout základní poznatky z výzkumu a ilustrovat je pomocí analýzy jedné sady snímků dvěma různými způsoby. Zmíněnou sadu tvoří celkem 10 trojic snímků - 5 se záběry kruhového etalonu a 5 s extrudovaným vláknem. Všechny tyto snímky byly pořízeny během několika minut a aby se během jejich pořizování zamezilo změnám optických vlastností systému (např. vychylování optických os nebo změně ohniskových vzdáleností vlivem zaostřování), byly objektivy kamer nejprve přibližně zaostřeny a následně zaaretovány.

1. příklad

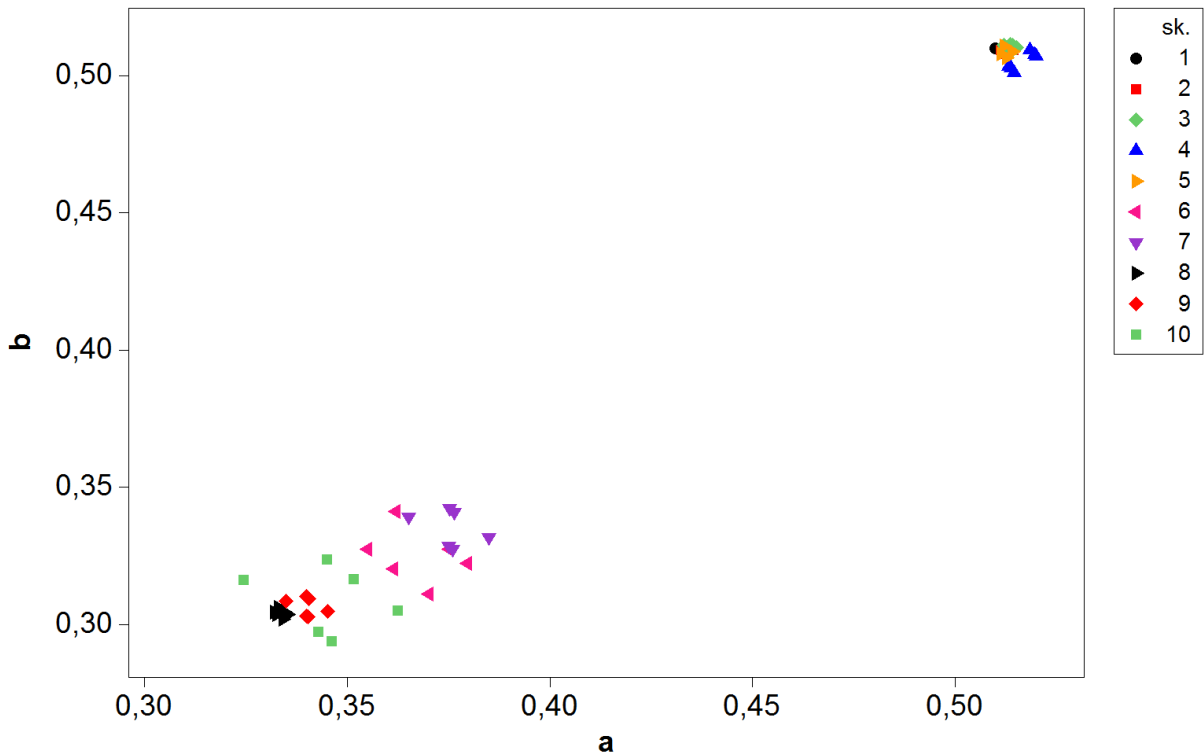
parametry kam. systému:

- $(f_1, f_2, f_3) = (23, 23, 23)$ mm
- $C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 = [327, 5; 245, 5]$ px
- $S_1 = [-46, 02; 26, 68]$ mm, $S_2 = [43, 10; 24, 76]$ mm, $S_3 = [-0, 18; -51, 54]$ mm

V tomto příkladě uvažujeme pro všechny kamery stejné ohniskové vzdálenosti a hlavní body v geometrickém středu obrazu. Hodnota 23 mm je odhad vycházející z faktu, že použité kamery mají jmenovitou ohniskovou vzdálenost 16 mm při zaostření na nekonečno - při zaostření na vzdálenost 50 mm by se měla ohnisková vzdálenost pohybovat právě kolem 23 mm. Po kalibraci podle modelu na obr. 3.14 s využitím jedné trojice snímků etalonu jsme z výchozích hodnot ohniskových vzdáleností a hlavních bodů výpočtem získali polohy optických středů kamer vypsané výše.

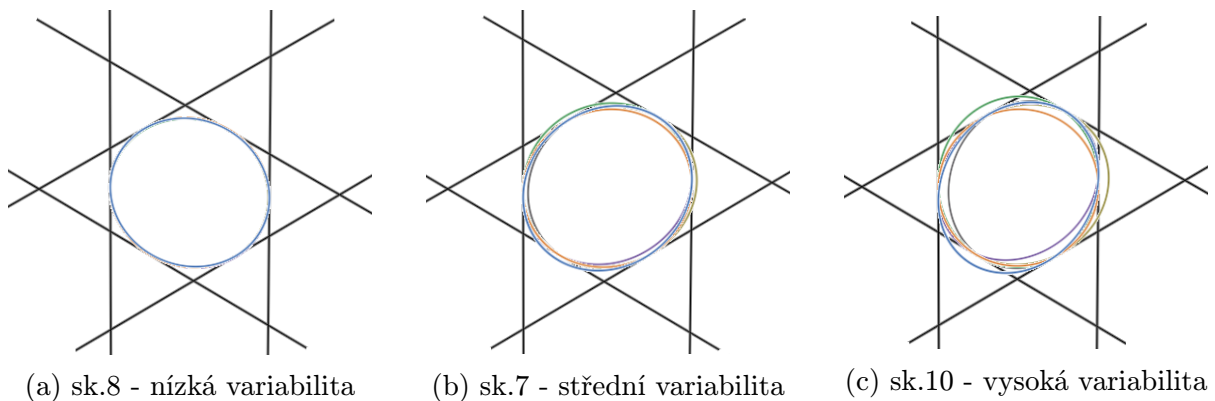
Jestliže má vlákno skutečně průřez s tvarem podobným elipse, je měřítkem správného určení ovality stav, kdy jsou si všechny pomocné elipsy určené pro odpovídající trojici snímků co nejpodobnější (a tak zároveň podobné aproximační elipse). Kromě zkoumání samotné ovality se tedy zaměříme na to, jakým způsobem vychází délky hlavní a vedlejší poloosy pomocných elips pro příslušné trojice. Výsledky pro naši sadu snímků a zmíněné nastavení kamerového systému je na obr. níže:

6. VÝSLEDKY MĚŘENÍ NA REÁLNÝCH DATECH



Obrázek 6.1: Hlavní a vedlejší poloosy pomocných elips v mm, nastavení 1

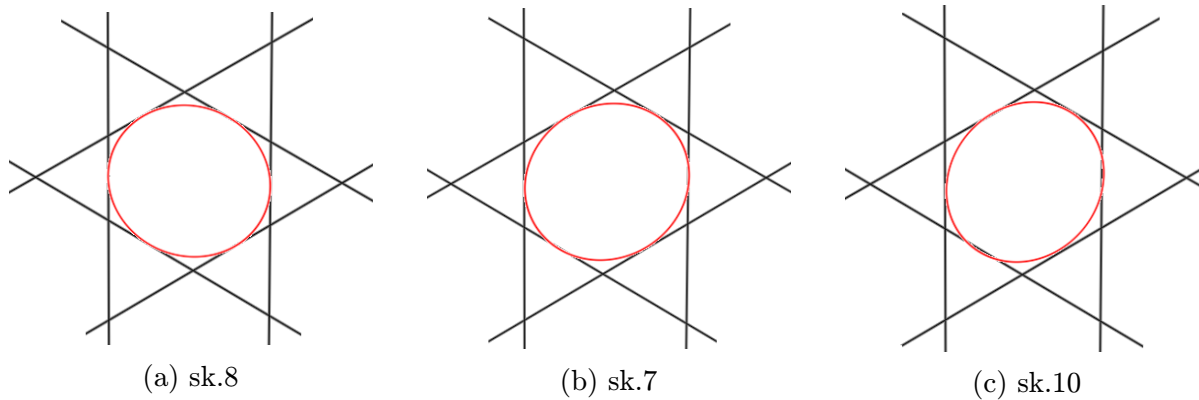
Skupiny 1-5 odpovídají pomocným elipsám pro trojice snímků kruhového etalonu o jmenovitém poloměru 0,51 mm, skupiny 6-10 pak snímkům vlákna. Na obr. 6.1 můžeme vidět, že kruhový etalon je při tomto nastavení určen velice přesně - nejenže pomocné elipsy v rámci svých skupin vykazují nízkou variabilitu, ale navíc jsou všechny pomocné elipsy z těchto skupin vzájemně velice podobné (což není samozřejmé, zvláště když přihlídneme k tomu, že se jedná o fotky etalonu ve velice rozdílných polohách, viz obr. 3.15). Oproti tomu u snímků vlákna můžeme pozorovat jiný jev - pomocné elipsy v rámci svých skupin mohou mít různou variabilitu, nízkou (sk. 8 a 9), střední (sk. 7) nebo poměrně vysokou (sk. 6 a 10).



Obrázek 6.2: Pomocné elipsy s různou variabilitou a optické tečny

Na obrázku výše můžeme vidět, že vyšší variabilita délek poloos je také spojena s vyšší variabilitou, co se týče polohy středu. Díky definici aproximační elipsy vyjde ale celková

ovalita tak, že docela přesně popisuje útvar, kterého se optické tečny dotýkají, a to bez ohledu na variabilitu hlavních a vedlejších poloos:



Obrázek 6.3: Aproximační elipsy a optické tečny

2. příklad

parametry kam. systému:

- $(f_1, f_2, f_3) = (17,22 ; 26,57 ; 21,77) \text{ mm}$
- $C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 = [327, 5; 245, 5] \text{ px}$
- $S_1 = [-34, 44; 19, 99] \text{ mm}$, $S_2 = [49, 78; 28, 61] \text{ mm}$, $S_3 = [-0, 18; -48, 78] \text{ mm}$

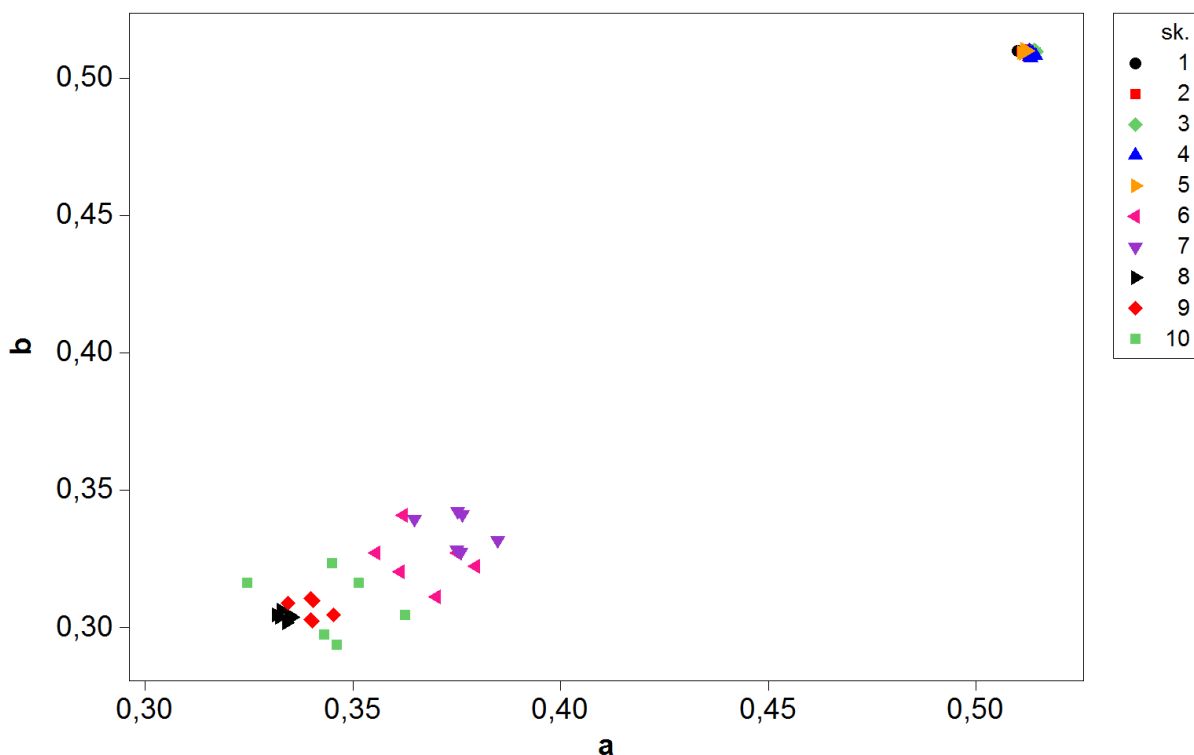
V tomto příkladě jsme opět zvolili hlavní bodu geometrického středu obrazů, ohniskové vzdálenosti a optické středy kamer jsme ale získali metodou gradientního spádu zmíněnou v podkapitole 3.3 tak, že jsme minimalizovali účelovou funkci (3.10) na snímcích etalonu 1-5. I když jsme vyšli z různých počátečních bodů (f_1, f_2, f_3) a požadovali pro ukončení metody hodnotu velikosti gradientu menší než 10^{-12} , došli jsme vždy přibližně k těmto hodnotám ohniskových vzdáleností.

Výsledné hodnoty ohniskových vzdáleností na jednu stranu částečně korelují s faktem, že kamery nejsou od snímaného vlákna stejně vzdáleny, na druhou stranu je zarážející, jak moc se od sebe tyto vzdálenosti liší. Protože podle našeho modelu se polohy optických středů dopočítávají právě podle ohniskových vzdáleností, hlavních bodů a referenčního etalonu, můžou vycházet i hodnoty, které jsou vypsány výše.

Poznámka. Pro různá optimalizační schémata vycházela z neznámých důvodů hodnota f_1 vždy o poznání nižší než f_2 a f_3 . Proběhl pokus najít možnou příčinu jako chybu v modelu či naprogramovaném kódu: snímky byly zanalyzovány tak, jako by ty pořízené kamerou 1 byly pořízeny kamerou 3, ty z kamery 3 kamerou 2 a ty z kamery 2 kamerou 1. Pokud by byla chyba v modelu nebo kódu, zapříčinilo by to, že bychom opět dostali u první kamery ohniskovou vzdálenost nižší než u dalších dvou. Naopak se ale prokázalo, že výsledné hodnoty byly stejné jako původně, jen indexy byly přecíslované souhlasně s „přecíslováním“ snímků - model je tedy invariantní vůči rotaci. Protože vlákno se na snímcích z kamery 1 jeví podobně silné jako na dalších dvou kamerách, musela by podstatně nižší ohnisková vzdálenost také automaticky znamenat, že kamera je blíž snímanému vláknu než ostatní dvě, ani to se ručním měřením ale neprokázalo.

6. VÝSLEDKY MĚŘENÍ NA REÁLNÝCH DATECH

V případě tohoto nastavení vyšly délky poloos pomocných elips takto:



Obrázek 6.4: Hlavní a vedlejší poloosy pomocných elips v mm, nastavení 2

Po srovnání s obrázkem 6.1 můžeme vidět, že optimalizace skutečně podstatně snížila rozptyl zjištěných poloos etalonu ve skupinách 1-5. Můžeme také pozorovat, že navzdory tomu, že konfigurace kamerového systému se dost liší od nastavení v 1. příkladě, pomocné elipsy (a tedy i ovalita) vlákna ve skupinách 6-10 se nijak zásadně nezměnila ¹. Zdá se tedy, že kalibrační modely svou vnitřní povahou „ladí“ výsledné hodnoty parametrů kamerového systému podle etalonu natolik, že změna ohniskových vzdáleností nemá na výslednou zjištěnou ovalitu větší vliv.

¹Protože obrázky pomocných a aproximačních elips by pro nastavení 2 vypadaly téměř totožně jako v příkladu 1, rozhodl se autor je nepřikládat.

Závěr

Cílem práce bylo provést kalibraci kamerového systému, analyzovat snímky z kamerového systému pomocí numerických metod zpracování obrazové informace, určit průměr a ovalitu extrudovaného vlákna a nakonec taky vytvořit speciální aplikaci pro danou analýzu.

Kalibrací kamerového systému se podrobně zabývala kapitola 3, kde byl popsán kamerový systém a kde byly představeny dva z možných přístupů kalibrace a jejich konkrétní realizace. První z přístupů, který jsme nazvali *přímá metoda kalibrace*, využíval tzv. *kalibračních značek* v obraze, tedy objektů, jejichž snímky máme k dispozici a jejichž velikost a/nebo tvar známe. V realizaci této metody byly jako kalibrační značky použity milimetrový papír a kruhová kytarová struna se známým průměrem. Tato metoda ale zvláště z důvodů mechanických nepřesností dávala výsledky s velkou variabilitou, navíc bylo její provedení časově náročné a těžko opakovatelné, a proto byla označena jako nevhodná. Druhý přístup kalibrace kamer zmíněný v této práci byl *optimalizační metoda kalibrace*, která hledá parametry kamerového systému tak, aby byla celková odchylka zjištěné ovality etalonu od jeho ideální kruhovitosti co nejmenší. V našem případě jsme jako minimalizační metodu zvolili *metodu gradientního spádu* a popsali jsme čtyři různé účelové funkce, které by mohly podléhat minimalizaci. Na rozdíl od přímé metody se ta optimalizační prokázala jako snadno zopakovatelná a obecně poměrně rychlá.

Analýzu snímků extrudovaného vlákna popisovala kapitola 4, ve které bylo částečně využito poznatků z kapitol předchozích. Po předzpracování obrazu bylo možné na snímcích s vlákny detekovat jejich hrany na subpixelové úrovni, a to pomocí metod potlačení šumu v obraze, konečných diferencí a vybraného statistického zpracování. Se znalostí parametrů kamerového systému nalezeného kalibrací a uměním detekovat pozice hran v obraze kapitola vylicila způsob, jakým se dají vyjádřit optické tečny. Po vyjádření optických tečen už nic nebránilo výpočtu ovality a průměru vlákna z analyzovaných snímků, a to jak díky schématickému postupu na konci kapitoly 1, tak s využitím matematického aparátu potřebného pro výpočet pomocných elips z kapitoly 2.

Jako součást práce vznikla v prostředí Delphi 7 víceúčelová aplikace, která je schopna jak analýzy snímků extrudovaného vlákna (tedy metod zpracování obrazu popsané v kapitole 4 a následného určení ovality a průměru), tak kalibrace kamerového systému přímou i optimalizační metodou.

Na závěr se podařilo s pomocí vytvořené aplikace zkalibrovat kamerový systém podle snímků kalibračního etalonu a hlavně určit ovalitu a průměr extrudovaného vlákna z jeho snímků. Z této analýzy např. vyplynulo, že i když použijeme při výpočtu ovality a průměru různá nastavení kamerového systému získaná kalibrací, tak se výsledná vypočtená ovalita ani průměr zásadně vzájemně neliší. Uvedme, že navzdory tomu, že hodnoty ohniskových vzdáleností získaných optimalizační metodou kalibrace nemusí zcela odpovídat reálným hodnotám kamerového systému, zdá se že, na výslednou vypočtenou ovalitu to nemá zásadní vliv. Hledání příčin, proč optimalizační metoda lépe neaproximuje skutečné ohniskové vzdálenosti kamerového systému a zda by se tento stav nedal zlepšit (např. volbou jiné účelové funkce), může být předmětem další studie.

Literatura

- [1] AGARWAL, Mahesh, John CLIFFORD a Michael LACHANCE. Duality and Inscribed Ellipses. *Computational Methods and Function Theory* [online]. 2015, **15**(4), 635-644 [cit. 2017-05-18]. Dostupné z: <http://www-personal.umd.umich.edu/~mkagarwa/PPDualityInscribedEllipses.pdf>
- [2] ALMKVIST, Gert a Bruce BERNDT. Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π , and the Ladies Diary. *The American Mathematical Monthly*. 1988, **95**(7). DOI: 10.2307/2323302. ISSN 00029890. Dostupné také z: <https://www.jstor.org/stable/2323302?origin=crossref>
- [3] BRITTI BACALHAU, José, Túlio MUMIC CUNHA a Conrado Ramos Moreira AFONSO. Effect of Ni content on the Hardenability of a Bainitic Steel for Processing of Plastics. *Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering* [online]. ABCM, 2017, 2017, , - [cit. 2019-05-11]. DOI: 10.26678/ABCM.COBEM2017.COB17-1174. Dostupné z: <http://abcm.org.br/anais-de-eventos/COB17/1174>
- [4] CHONG, Edwin Kah Pin a Stanislaw H. ŽAK. *An introduction to optimization*. 2nd ed. New York: Wiley, c2001. ISBN 04-713-9126-3.
- [5] DRUCKMÜLLER, Miloslav. *Numerické metody analýzy obrazů*. (přednášky) Brno: VUT v Brně Fakulta strojního inženýrství, 2016.
- [6] DRUCKMÜLLEROVÁ, Hana. *Phase-correlation based image registration*, Brno: Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, 2010. (100 pages). Supervisor Mgr. Jana Procházková, PhD.
- [7] Duality (projective geometry). In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2017-05-14]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_\(projective_geometry\)#Principle_of_Duality](https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_(projective_geometry)#Principle_of_Duality)
- [8] HARTLEY, Richard a Andrew ZISSERMAN. *Multiple view geometry in computer vision*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2003. ISBN 05-215-4051-8.
- [9] JANYŠKA, Josef a Anna SEKANINOVÁ. *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*. Brno: Masarykova univerzita, 1996. ISBN 8021014350.
- [10] KHAN, Nazar. *Computer vision*. (přednášky) Lahore: Punjab University College of Information Technology, 2017. Dostupné také z http://faculty.pucit.edu.pk/nazarkhan/teaching/Fall2017/CS565/Lectures/17-18_camera_models.pdf.
- [11] KORN, Granino A. a Theresa M. KORN. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Dover ed. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. ISBN 0486411478.
- [12] KOZÁK, Petr. Řešené úlohy z projektivní geometrie kuželoseček. 2012, 90 s., 32 s. příloh. Diplomové práce. Univerzita Palackého, Katedra algebry a geometrie. Vedoucí práce Lenka Juklová.

- [13] LOUČKA, P.: *Měření ovality extrudovaného vlákna*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 59 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Pavel Štarha, Ph.D.
- [14] PRATT, William K. *Digital image processing: PIKS inside*. 3rd ed. New York: Wiley, c2001. ISBN 04-713-7407-5.
- [15] *Project Rhea* [online]. [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: https://www.projectrhea.org/rhea/index.php/Edge_Detection_with_Gaussian_Blur
- [16] STŘECHOVÁ, Ludmila. *Projektivní geometrie kuželoseček* [online]. Brno, 2013 [cit. 2019-05-14]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/sl50w/>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Josef Janyška.
- [17] ŠTARHA, P.; RAUDENSKÝ, M.; Vysoké učení technické v Brně, Brno, CZ: *Zařízení ke kontrole extrudovaného vlákna*. 304447, patent. (2014)
- [18] *The Foundry Visionmongers Limited* [online]. [cit. 2019-05-16]. Dostupné z: https://learn.foundry.com/modo/902/content/help/pages/rendering/camera_matching.html
- [19] *The Imaging Source* [online]. [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: <https://www.theimagingsource.com/products/industrial-cameras/usb-2.0-monochrome/dmk41au02/>
- [20] VOSSLER, Donald L. *Exploring analytic geometry with Mathematica*. 1. San Diego: Academic Press, c2000. ISBN 0127282564.
- [21] WEISSTEIN, Eric W. *Ellipse* [online]. Champaign (Illinois): MathWorld, c2017 [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html>

Seznam použitých zkratk a symbolů

| | |
|-----------------|--|
| \mathcal{E}_2 | euklidovská rovina |
| \mathcal{P}_2 | projektivní rozšíření euklidovské roviny |
| \mathcal{C} | projektivní rovina |
| P | množina bodů |
| L | množina přímek |
| I | incidenční relace |
| \mathcal{C}^* | duální projektivní rovina |
| I^* | duální incidenční relace |
| \mathcal{K} | kuželosečka |
| \mathbb{R} | množina reálných čísel |

Seznam příloh

CD s víceúčelovou aplikací, návodem k použití a snímky

Složka „Ovalita“ obsahuje dva soubory a jednu složku:

1. aplikace.exe

- spouští aplikaci vytvořenou v Delphi 7 bez nutnosti mít tento software nainstalovaný

2. readme.pdf

- obsahuje návod k použití aplikace a poznámky

3. „Snímky“

- obsahuje 5 trojic snímků etalonu, 5 trojic snímků vlákna a složku „Etalon nevychýlený“ - ten obsahuje trojici snímků referenčního etalonu